PROBLÈMES DU 2^{nd} TOURNOI FRANÇAIS DES JEUNES MATHÉMATICIENNES ET MATHÉMATICIENS

14 – 16 AVRIL 2012, PALAISEAU (FRANCE)

Table des matières

Mots clés : 1. Théorie additive des nombres, équations diophantiennes – 2. Théorie des nombres, congruences – 3. Géometrie plane – 4. Géometrie analytique, centre de gravité – 5. Suites récurrentes, probabilités.

Notations

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$	ensemble des nombres entiers strictement positifs
$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$	ensemble des nombres entiers, rationnels, complexes
$\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$	droite réelle et plan réel
$a \bmod b$	reste de la division euclidienne de a par b
$\#M$	cardinal (nombre d'éléments) d'un ensemble M
$\tau(n)$	nombre de diviseurs positifs de n
$\varphi(n)$	fonction indicatrice d'Euler
$\gcd(x_1, \ldots, x_n)$	plus grand commun diviseur des entiers $x_1, \ldots, x_n$

1. Nombres plus que parfaits

N'importe quelle fonction $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ est dite *arithmétique*. Dans tout ce problème n désigne un nombre entier strictement positif. On rappelle que n est dit *parfait* s'il est égal à la somme de ses diviseurs positifs stricts (c'est-à-dire différents de n). Par exemple, 6, 28 et 496 sont parfaits. Euler a prouvé que si $k \geq 1$ est un nombre entier tel que $2^k - 1$ est premier, alors $n = 2^k(2^k - 1)$ est parfait.

En guise de généralisation, si f une fonction arithmétique, on dira que n est *f-parfait* si

$$f(n) = \sum_{\substack{d \mid n \\ 1 \leq d \leq n-1}} f(d).$$

Par exemple, n est parfait si, et seulement, si, n est f-parfait pour $f(n) = n$; n est f-parfait pour la fonction constante $f(n) = 1$ si, et seulement si, n est premier.

1. Soit $\tau(n)$ le nombre de diviseurs positifs de n (incluant n).

a) Démontrer que n est τ-parfait si, et seulement si, n est le carré d'un nombre premier.

Date: 23 mars 2012.

b) Trouver tous les nombres entiers n qui sont f-parfaits lorsque $f(n) = \tau(n) - 1$. Pour le plus grand nombre possible d'entiers relatifs $k \in \mathbb{Z}$, trouver tous les nombres entiers f-parfaits où $f(n) = \tau(n) + k$.

2. Trouver tous les nombres entiers positifs f-parfaits, où $f(n) = \varphi(n)$ est la fonction indicatrice d'Euler.

3. a) Prouver que si $k \geq 1$ est un nombre entier tel que $2^{k+1} - 2k - 1$ est premier, alors $n = 2^k(2^{k+1} - 2k - 1)$ est f-parfait pour $f(n) = n - 1$.

b) Trouver des conditions suffisantes similaires pour qu'un entier positif soit f-parfait lorsque f un polynôme de degré 1 (par exemple $f(n) = n - 2$ ou $f(n) = n + 1$).

4. Soit $f(n) = \ln(n)$. Trouver tous les nombres entiers positifs f-parfaits.

5. Soit $f(n) = (-1)^n$. Trouver tous les nombres entiers positifs f-parfaits. Plus généralement, étudiez le cas où $f(n) = \omega^n$, où $\omega \in \mathbb{C}$ est une racine de l'unité.

6. Soit $f(n) = \binom{2012}{n}$. Trouver tous les nombres entiers positifs f-parfaits. Étudiez le cas plus général où 2012 est remplacé par un nombre entier strictement positif c.

7. Trouver des conditions nécessaires et/ou suffisantes pour qu'un entier positif soit f-parfait pour d'autres fonctions arithmétiques f.

8. Un couple d'entiers strictement positifs (m, n) est dit *amical* si

$$n = \sum_{\substack{d|m \\ 1\leq d\leq m-1}} d \quad \text{and} \quad m = \sum_{\substack{d|n \\ 1\leq d\leq n-1}} d.$$

Par exemple, $(220, 284)$ est amical. Si f est une fonction arithmétique, proposer une définition raisonnable pour qu'un couple d'entiers strictement positifs (m, n) soit f-amical. Pour diverses fonctions arithmétiques f, trouver les couples d'entiers strictement positifs (m, n) f-amicaux ou bien démontrer qu'il n'en existe pas.

2. La formule des résidus

On note $T_k = \frac{k(k+1)}{2}$ le $k^{\text{ème}}$ nombre triangulaire, où $k \in \mathbb{N}^*$. Pour chaque entier strictement positif n, soit u_n le nombre différents de termes $(T_k \mod n)_{k\geq 1}$.

1. Trouver une formule pour u_n lorsque n est une puissance de 2.

2. Trouver une formule pour u_n lorsque n est la puissance d'un nombre premier.

3. Trouver une formule pour u_n dans le cas général.

4. Soit $P(x)$ un polynôme à coefficients rationnels tels que $P(k)$ soit entier pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Trouver le nombre de résidus différents modulo n dans la suite $(P(k))_{k\geq 1}$, où n est une entier strictement positif.

5. Proposer et étudier des questions similaires.

3. Triangles isocèles

On considère un triangle ΔABC dont les longueurs des côtés sont a, b, c et les longueurs des médianes sont m_a, m_b, m_c (voir Figure 1). Il est connu que $m_a = m_b$ si, et seulement si, $a = b$ (autrement dit ABC est isocèle).

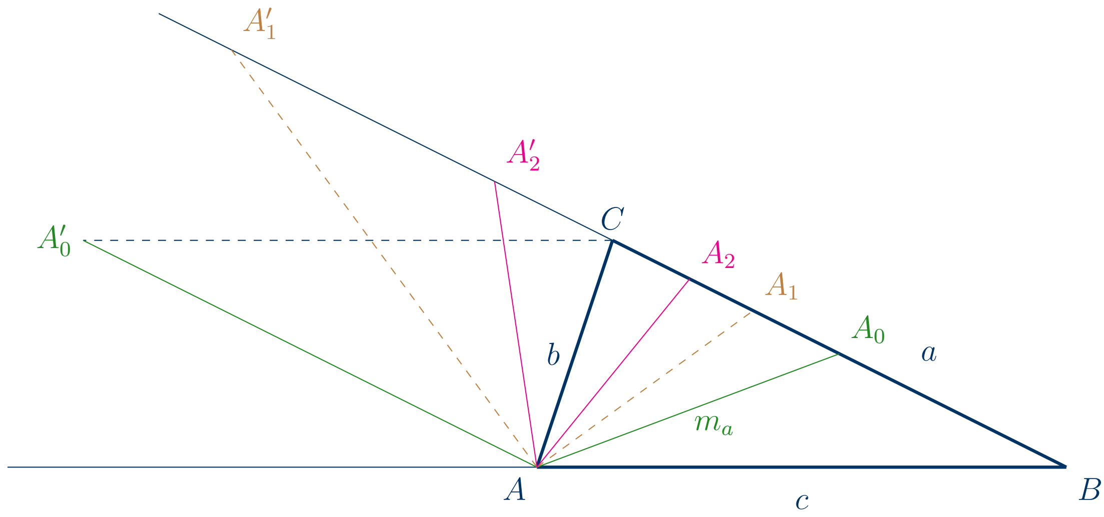

FIGURE 1. Un triangle ABC avec une médiane AA_0, une bissectrice intérieure AA_1, une symédiane AA_2, une ex-médiane AA'_0, une bissectrice extérieure AA'_1 et une ex-symédiane AA'_2.

1. Montrer que deux bissectrices intérieures d'un triangle ont même longueur si, et seulement si, le triangle est isocèle.

2. La *symédiane* passant par un sommet donné d'un triangle est le symétrique de la médiane par rapport à la bissectrice intérieure issues de ce sommet. Montrer que deux symédianes d'un triangle ont même longueur si, et seulement si, le triangle est isocèle.

3. Est-il vrai que deux bissectrices extérieures d'un triangle sont égales si, et seulement si, le triangle est isocèle ?

4. Une *ex-médiane* est par définition parallèle à un côté d'un triangle et passe par le sommet opposé. La *ex-symédiane* passant par un sommet d'un triangle est le symétrique de l'ex-médiane par rapport à la bissectrice extérieure passants par ce sommet.

Est-il vrai que deux ex-symédianes d'un triangle ont même longueur si, et seulement si, le triangle est isocèle ?

Soit $n \neq 0$ un nombre réel. Un *n-segment interne* (*externe*) d'un triangle est un segment passant par un sommet qui coupe intérieurement (extérieurement) le côté opposé dans les proportions des puissances n-ièmes des côtés adjacents. Plus précisément, les segments $[AA_n]$ et $[AA'_n]$ sont respectivement des n-segments internes et externes en A si on a $\frac{BA_n}{A_nC} = \frac{c^n}{b^n}$ et $\frac{BA'_n}{A'_nC} = \frac{c^n}{b^n}$.

5. Vérifiez que les bissectrices intérieures et symédianes sont respectivement des 1-segments et 2-segments internes d'un triangle. Vérifiez également que les bissectrices extérieures et les ex-symédianes sont respectivement les 1-segments et 2-segments extérieures d'un triangle.

6. Est-il vrai que deux n-segments internes d'un triangle sont égaux si, et seulement si, le triangle est isocèle ?

7. Est-il vrai que deux n-segments externes d'un triangle sont égaux si, et seulement si, le triangle est isocèle ?

8. Proposez et étudiez des directions de recherche additionnelles.

4. Polygônes stables

Soit $n \geq 3$ un entier, et soit P_n l'ensemble des sommets d'un polygône régulier à n sommets. Un sous-ensemble $A \subseteq P_n$ est dit *stable* si le centre de gravité des points appartenant à A coincide avec le centre du polygône régulier.

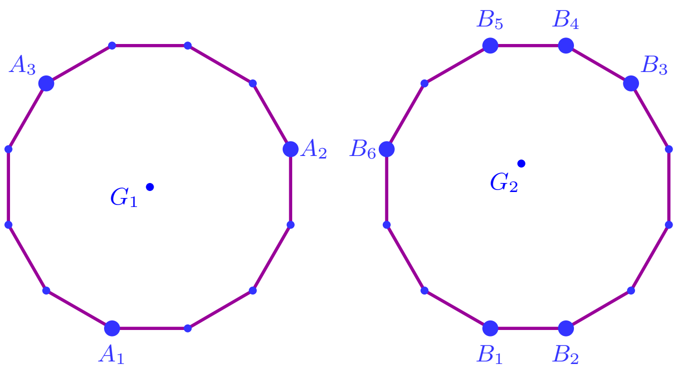

FIGURE 2. Le sous-ensemble $A = \{A_1, A_2, A_3\}$ de P_{12} est stable, mais le sous-ensemble $B = \{B_1, \ldots, B_6\}$ ne l'est pas.

1. Lorsque n est premier, trouver le nombre de sous-ensembles stables $A \subseteq P_n$ et les décrire.

2. Même question lorsque n est le produit de deux nombres premiers différents.

3. Même question lorsque n est une puissance d'un nombre premier.

4. Étudier le problème pour un entier n quelconque.

5. Proposez et étudiez des directions de recherche additionnelles.

5. Suites récurrentes

1. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels telle que pour tout entier $n \geq 2$:

$$u_{n+1} = \frac{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}{n}.$$

Étudier les propriétés de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ en fonction de u_1 et u_2. Par exemple la suite est-elle monotone, bornée, convergente ... ?

2. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels tels que pour tout entier $n \geq 2$:

$$u_{n+1} = \frac{u_1 u_n + u_2 u_{n-1} + \cdots + u_{n-1} u_2 + u_n u_1}{n}.$$

Étudier les propriétés de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ en fonction de u_1 et u_2.

3. Soient u_1 et u_2 deux nombres réels. On construit une suite aléatoire $(u_n)_{n\geq 1}$ de la manière suivante. Pour chaque $n \geq 2$, si $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sont déjà construits, on choisit une permutation σ de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ avec probabilité $1/n!$ et on pose :

$$u_{n+1} = \frac{u_1 u_{\sigma(1)} + u_2 u_{\sigma(2)} + \cdots + u_n u_{\sigma(n)}}{n}.$$

a) Étudier les propriétés de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ en fonction de u_1 et u_2.

b) Même question si σ est une fonction aléatoire $\{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ au lieu d'une permutation.

4. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombre réels telle que pour $n \geq 4$,

$$u_n = \frac{u_1 u_{n+1} + u_2 u_n + \cdots + u_n u_2 + u_{n+1} u_1}{n+1}.$$

a) Étudier les propriétés de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ en fonction de u_1, u_2, u_3 et u_4.

b) On suppose de plus que $u_1 = u_2 = u_3 = 1$. Existe-t-il une valeur u_4 telle que $0 \leq u_4 < 1$ et $u_n < 1$ pour tout $n \geq 1$?

Laboratoire de Mathématiques, Université Paris-Sud, 91400 Orsay, FRANCE
E-mail address: `organisateurs@tfjm.org`
URL: `http://www.tfjm.org/`