

PROBLÈMES DU 1^{er} TOURNOI FRANÇAIS DES JEUNES MATHÉMATIENS

22 AU 25 AVRIL 2011, ORSAY (FRANCE)

TABLE DES MATIÈRES

Notation	1
1. Fonctions arithmétiques	1
2. Fibonacci et au-delà	2
3. Un boulier	2
4. Réarrangements	3
5. Triangles convergents	4
6. Inégalités sur les côtés	4
7. Le jeu de cycle	5
8. Longueurs moyennes	6
9. Racines de l'unité	7
10. Racines multiples	7

Mots clés : 1. théorie des nombres additive, équations diophantiennes – 2. théorie des nombres, congruences – 3. combinatoire, dynamique discrète – 4. permutations – 5. géométrie analytique, convergence – 6. inégalités – 7. jeux, graphes – 8. géométrie métrique, inégalités – 9. algèbre, fractions rationnelles – 10. algèbre, polynômes.

Notation

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$	ensemble des entiers strictement positifs
$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$	ensembles de nombres entiers, rationnels et complexes
\mathbb{R}, \mathbb{R}^2	droite réelle, plan
$\mathbb{F}_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$	corps des résidus modulo un nombre premier p
$K[x], K(x)$	algèbre des polynômes, fractions rationnelles à coefficients dans K
φ	fonction indicatrice d'Euler
$\text{PGCD}(x_1, \dots, x_n)$	plus grand diviseur commun des entiers x_1, \dots, x_n

1. Fonctions arithmétiques

1. Pour un entier naturel $n > 2$, soient $1 = a_1 < a_2 < \dots < a_{\varphi(n)} = n - 1$ les entiers naturels strictement inférieurs à n et premiers avec n . Trouver la valeur des sommes suivantes :

$$\sum_{i=1}^{\varphi(n)} a_i \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{\varphi(n)/2} a_i.$$

2. On note $\psi(n)$ le nombre de triplets $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ tels que

$$0 \leq x < y, \quad 0 < z, \quad \text{PGCD}(x, y, z) = 1 \quad \text{et} \quad yz = n.$$

Trouver une formule pour $\psi(n)$ en fonction de n et ses facteurs premiers.

3. Soient a et b des entiers strictement positifs. On définit $f(a, b, n)$ comme le nombre de solutions $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ de l'équation

$$ax + by = n.$$

Trouver une formule pour $f(a, b, n)$.

4. Soit maintenant $g(n)$ le nombre de quadruplets (a, b, x, y) d'entiers strictement positifs tels que

$$a < b, \quad \text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(x, y) = 1 \quad \text{et} \quad ax + by = n.$$

Donner une formule ou une estimation de $g(n)$.

5. Suggérer et étudier des questions analogues pour des équations linéaires de la forme $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_kx_k = n$.

2. Fibonacci et au-delà

Soient a et b des entiers. On considère la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie récursivement par

$$\begin{cases} x_1 = x_2 = 1 \\ x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2} \quad \text{pour tout } n \geq 3. \end{cases}$$

Soit $p > 0$ un entier. On note $(\bar{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des restes de la division euclidienne de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par p : pour tout n , $\bar{x}_n \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ est tel que p divise $x_n - \bar{x}_n$.

1. On prend $a = b = 1$; $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors la suite de Fibonacci. On suppose en outre que p est premier.

- Montrer que la suite $(\bar{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est périodique c'est à dire, qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\bar{x}_{n+k} = \bar{x}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le plus petit $k > 0$ qui satisfait à cette condition est appelé *période* de la suite.
- Montrer que si p est congru à 1 ou 4 modulo 5, alors $\bar{x}_{p-1} = 0$ et $\bar{x}_p = \bar{x}_{p+1} = 1$.
- Montrer que si p est congru à 2 ou 3 modulo 5, alors $\bar{x}_{p-1} = 1$, $\bar{x}_p = p-1$ et $\bar{x}_{p+1} = 0$.
- Montrer que si $p \equiv 3 \pmod{4}$, alors $\bar{x}_n \neq 0$ pour tout n impair.
- Trouver des bornes supérieures et inférieures pour la période de la suite $(\bar{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. Qu'en est-il des questions précédentes dans le cas où p n'est pas premier ?

3. Étudier le problème pour d'autres valeurs de a et b , par exemple si $a = 2012$ et $b = 2011$.

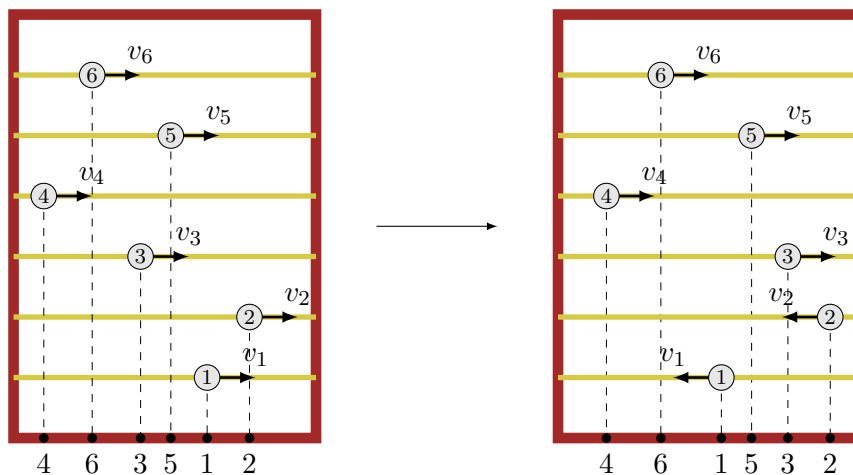
3. Un boulier

On considère un boulier très simple : un cadre solide avec n tiges horizontales et une boule par tige. On suppose que les boules, numérotées de 1 à n , glissent sur les tiges à vitesse constante non nulle v_1, v_2, \dots, v_n respectivement. Si une boule touche le cadre, elle rebondit (choc dur) en conservant sa vitesse par rapport au cadre mais en sens opposé. À tout moment où il n'y a pas deux boules sur la même verticale, on projette les nombres des boules sur le côté inférieur du cadre, obtenant une permutation des entiers de 1 à n , comme on peut voir sur la figure.

1. Quelles sont les positions et vitesses de départ des boules qui permettent d'engendrer toutes les permutations des entiers $1, 2, \dots, n$ de cette façon ? Tout d'abord, considérer les cas où n

vaut deux, trois, quatre ou cinq, et supposer que les boules partent simultanément du côté gauche du cadre et glissent vers la droite avec des vitesses deux à deux distinctes.

2. Existe-t-il des positions et vitesses initiales telles que chaque permutation des entiers de 1 à n apparaît exactement une fois par période ?



3. Plus généralement, décrire l'ensemble des permutations ainsi produites pour des positions et vitesses de départ des boules données.

4. Étudier des bouliers ayant plus d'une boule sur quelques tiges. Par exemple, le cas où une des tiges contient plusieurs boules qui se déplacent à même vitesse, et qui changent de sens lorsqu'elles se touchent.

5. Étudier le problème lorsqu'on introduit des accélérations.

4. Réarrangements

Soient $0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ des entiers. On note $D(a_1, a_2, \dots, a_n)$ l'ensemble de toutes les paires d'entiers strictement positifs (a, b) tels qu'il existe un réarrangement x_1, x_2, \dots, x_n de la suite a_1, a_2, \dots, a_n avec la propriété suivante :

$$\text{pour tout } 1 \leq i < n, |x_i - x_{i+1}| = a \text{ ou } b.$$

1. Pour a et b dans \mathbb{N} , trouver tous les entiers n tels que $(a, b) \in D(1, 2, \dots, n)$.

2. Pour a, b et K dans \mathbb{N} , trouver le plus grand entier n tel que $(a, b) \in D(a_1, a_2, \dots, a_n)$ pour des entiers strictement positifs a_1, a_2, \dots, a_n inférieurs ou égaux à K .

3. Pour a, b et n dans \mathbb{N} , trouver la plus petite valeur de la différence $a_n - a_1$ telle que la paire (a, b) appartienne à $D(a_1, a_2, \dots, a_n)$, où maintenant $a_1 < a_2 < \dots < a_n$.

4. On note $C(a_1, a_2, \dots, a_n)$ l'ensemble des paires d'entiers strictement positifs (a, b) tels qu'il existe un réarrangement x_1, x_2, \dots, x_n de la suite a_1, a_2, \dots, a_n qui vérifie

$$\text{pour tout } 1 \leq i \leq n, |x_i - x_{i+1}| = a \text{ ou } b, \text{ avec la convention que } x_{n+1} = x_1.$$

Étudier les questions de 1 à 3 pour l'ensemble $C(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

5. Étudier les versions analogues pour des triplets (a, b, c) , quadruplets (a, b, c, d) et ainsi de suite.

5. Triangles convergents

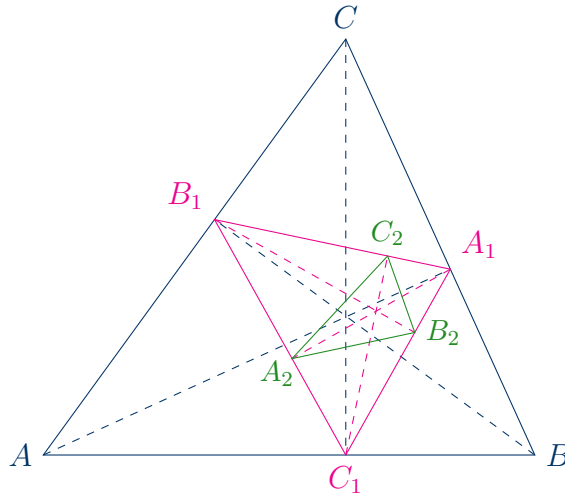
Soient A , B et C les sommets d'un triangle, K_1 , L_1 , M_1 les milieux des côtés BC , AC et AB respectivement. On appelle f l'opération qui passe du triangle ΔABC au triangle $\Delta K_1 L_1 M_1$ dont les sommets sont les milieux des côtés de ΔABC . En itérant cette opération, on définit la suite de triangles $\Delta K_n L_n M_n$ telle que

$$\Delta K_1 L_1 M_1 = f(\Delta ABC) \quad \text{et} \quad \Delta K_{n+1} L_{n+1} M_{n+1} = f(\Delta K_n L_n M_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. Prouver que la suite $\Delta K_n L_n M_n$ converge vers un point P , déterminer ce point et estimer la vitesse de convergence.

On considère maintenant l'opération g qui passe du triangle ΔABC au triangle dont les sommets sont les pieds des hauteurs de ΔABC . Soit alors

$$\Delta A_1 B_1 C_1 = g(\Delta ABC) \quad \text{et} \quad \Delta A_{n+1} B_{n+1} C_{n+1} = g(\Delta A_n B_n C_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$



2. Trouver une formule pour A_1 en fonction des points A , B et C .

3. Est-ce qu'il est vrai que si la limite de la suite de triangles $\Delta A_n B_n C_n$ existe, alors elle tombe forcément à l'intérieur du cercle circonscrit à ΔABC ? Considérer aussi le cercle circonscrit à $\Delta A_1 B_1 C_1$.

4. Étudier la convergence de la suite $(\Delta A_n B_n C_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Que se passe-t-il lorsqu'un des triangles $\Delta A_n B_n C_n$ est rectangle?

5. On note H le point limite de la suite $(\Delta A_n B_n C_n)_{n \in \mathbb{N}}$, s'il existe. Montrer que $H = H(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$ est une fonction continue des angles \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} , qui n'est nulle part différentiable. Estimer la différence $H(\hat{A} + \epsilon, \hat{B} - \epsilon, \hat{C}) - H(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$ en fonction de $\epsilon > 0$.

6. Étudier le problème analogue pour les pieds des bissectrices.

6. Inégalités sur les côtés

Soit T l'ensemble des triplets (a, b, c) de nombres réels positifs tels qu'il existe un triangle non dégénéré de côtés de longueur a , b et c .

1. Soient $n \geq 3$ un entier et a_1, a_2, \dots, a_n des réels positifs tels que

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)^2 > (n-1)(a_1^4 + a_2^4 + \dots + a_n^4).$$

Montrer qu'alors tout triplet (a_i, a_j, a_k) avec indices deux à deux distincts $1 \leq i \neq j \neq k \neq i \leq n$ appartient à T .

2. Pour un entier positif n , trouver les bornes supérieures et inférieures de l'expression

$$\frac{\sqrt[n]{a^n + b^n} + \sqrt[n]{b^n + c^n} + \sqrt[n]{c^n + a^n}}{a + b + c}$$

quand a, b et c parcourent T .

3. Décrire l'ensemble des réels positifs x tels que $a^x < b^x + c^x$ pour $(a, b, c) \in T$ et $a \geq b \geq c$.

4. Pour un entier positif n , trouver le plus grand réel $k = k(n)$ tel que

$$a^n + b^n + c^n \geq k(a + b + c)^n$$

pour tout triplet (a, b, c) dans T .

5. On peut remplacer dans les questions 2 à 4 l'ensemble T par

- l'ensemble T_{ac} des triplets (a, b, c) pour lesquels le triangle de côtés de longueurs a, b et c est *acutangle* ;
- l'ensemble T_{ob} des triplets (a, b, c) pour lesquels le triangle de côtés de longueurs a, b et c est *obtusangle* ;
- l'ensemble T_{re} des triplets (a, b, c) pour lesquels le triangle de côtés de longueurs a, b et c est *rectangle* ;

7. Le jeu de cycle

On considère un graphe plan non dirigé G , avec éventuellement des boucles mais sans arête multiple. Soient V l'ensemble de ses sommets et E celui des arêtes. Un *chemin de longueur k* est une suite d'arêtes distinctes $(v_0, v_1), (v_1, v_2), \dots, (v_{k-1}, v_k)$. On appelle les points v_0 et v_k respectivement le *sommet de départ* et *d'arrivée* du chemin, alors que v_1, \dots, v_{k-1} sont les *sommets intérieurs*. On dit qu'un chemin est *simple* si tous ses sommets sont distincts, sauf peut-être pour les sommets de départ et d'arrivée. Un *cycle de longueur k* est un chemin **simple** de longueur k tel que $v_0 = v_k$. Ainsi, les cycles de longueur 1 sont précisément les boucles de G , et il n'y a pas de cycle de taille 2.

Dans un graphe dirigé, on appelle *flèche* une arête orientée. On définit de façon analogue les *chemins dirigés*, les *chemins simples dirigés* et les *cycles dirigés*. On remarque que, dans un graphe dirigé, pour toute paire de points $a \neq b$, il existe au plus une flèche de a vers b et au plus une flèche de b vers a , qui sont notées (a, b) et (b, a) respectivement.

Soient $n \geq 5$ et $k \geq 1$ des entiers, et n points donnés dans le plan.

1. Les élèves Clara et Carl jouent au jeu suivant : ils dessinent alternativement une arête entre deux points qui ne sont pas encore reliés par une arête. Clara commence. Pour chacun des critères de fin de jeu suivants, trouver une stratégie pour un des élèves :

- le perdant est celui qui laisse après son tour un graphe non dirigé contenant un cycle de longueur au moins k ;
- le perdant est celui qui laisse après son tour un graphe non dirigé contenant un cycle de longueur exactement k ;
- le gagnant est celui qui laisse après son tour un graphe non dirigé contenant un cycle de longueur au moins k ;
- le gagnant est celui qui laisse après son tour un graphe non dirigé contenant un cycle de longueur exactement k .

Considérer deux problèmes différents : quand les boucles sont autorisées, et quand elles ne le sont pas.

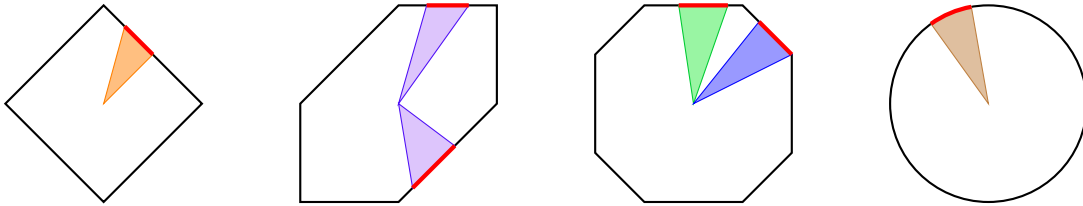
2. Énoncer et étudier des questions similaires pour les graphes dirigés.
3. Étudier des variantes du jeu où Clara et Carl dessinent des arêtes ou flèches de deux couleurs différentes, disons rouge et bleu respectivement. Le gagnant (ou perdant) est alors celui qui laisse après son tour un graphe non dirigé (dirigé) contenant un cycle de longueur au moins (exactement) k .
4. Suggérer et étudier des versions analogues du jeu pour plus de deux joueurs.

8. Longueurs moyennes

Soit L une courbe fermée et symétrique par rapport à l'origine O , bord d'un ensemble convexe du plan $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. La L -distance $d_L(M, N)$ entre deux points distincts M et N dans \mathbb{R}^2 est le rapport $d(M, N)/d(O, P)$, où d est la distance Euclidienne usuelle et P est un des points d'intersection de L et la parallèle à (MN) passant par O .

Une *corde* est un segment reliant deux points de L . On s'intéresse à la *distance cordale moyenne* de L , calculée de la façon suivante :

- on considère la paramétrisation de L par $M(\theta) = r(\theta)e^{i\theta}$ avec $\theta \in [0, 2\pi]$;
- on intègre $d_L(M(u), M(v))$ fois l'aire des triangles élémentaires $\Delta OM(u)M(u+du)$ et $\Delta OM(v)M(v+dv)$ pour u et v dans $[0, 2\pi]$;
- on divise le résultat par le carré de l'aire de l'ensemble convexe borné par L .



1. Montrer que l'aire d'un triangle élémentaire $\Delta OM(u)M(u+du)$ est $\frac{1}{2}r(u)^2 du$.

2. Montrer que la longueur cordale moyenne est donnée par

$$E(L) = \frac{\int_{u=0}^{2\pi} \int_{v=0}^{2\pi} d_L(M(u), M(v)) r(u)^2 r(v)^2 du dv}{\left(\int_{u=0}^{2\pi} r(u)^2 du\right)^2}$$

3. Montrer que $1/2 < E(L) < 2$. Améliorer ces bornes.

4. Calculer $E(L)$ si L est : a) un carré ; b) un parallélogramme ; c) un cercle.

5. Comment change $E(L)$ lorsque L subit une transformation linéaire ?

6. On suppose que L est un polygone de sommets $v_0, v_1, \dots, v_{2n-1}$. On note s_i le côté $[v_i v_{i+1}]$, où on a écrit $v_{2n} = v_0$.

a) Pour $t \in [0, 1]$, soit $s_i(t)$ le point $(1-t)v_i + tv_{i+1}$ du côté s_i . Montrer que $d_L(s_i(s), s_j(t))$ est une fonction linéaire par morceaux de s et t .

b) Relier $E(L)$ et les

$$a_{ij} = \int_{s=0}^1 \int_{t=0}^1 d_L(s_i(s), s_j(t)) ds dt$$

c) Trouver un algorithme pour calculer $E(L)$ lorsque L est un polygone.

7. Trouver une formule pour $E(L)$ lorsque L est un polygone régulier à n côtés, pour n pair et plus grand que 2.
8. Montrer que tout hexagone convexe et symétrique par rapport à O s'envoie par une transformation linéaire sur un hexagone $H_{x,y}$ de sommets (x, y) , $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-x, -y)$, $(-1, -1)$, $(1, -1)$, où $x \geq 1$, $y \geq 0$ et $x + y \leq 2$.
9. Trouver une formule pour $E(H_{x,y})$ pour ces (x, y) .
10. Trouver toutes les valeurs prises par $E(H)$ sur les hexagones.
11. Calculer $E(L)$ pour quelques L .
12. Trouver ou conjecturer les limites supérieures et inférieures de $E(L)$ sur tous les L .
13. Étudier le problème analogue en dimension 3. Par exemple, calculer $E(L)$ lorsque L est : a) une sphère ; b) un octaèdre régulier ; c) un cube.

9. Racines de l'unité

Soit n un entier naturel. Il y a exactement n nombres complexes distincts qui satisfont l'équation $z^n = 1$. On les appelle les *racines n^{es} de l'unité*.

Soit K un corps. On note $K(x)$ l'ensemble des fractions rationnelles à coefficients dans K :

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0}{b_l x^l + \cdots + b_1 x + b_0},$$

où $p(x)$ et $q(x)$ sont des polynômes à coefficients dans K et $q(x) \neq 0$.

1. Trouver toutes les fractions rationnelles $f \in \mathbb{Q}(x)$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et toute racine n^{e} de l'unité $s \in \mathbb{C}$, le nombre $f(s)$ est encore une racine n^{e} de l'unité.
2. Trouver toutes les fractions rationnelles $f \in \mathbb{Q}(x)$ pour lesquelles il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $n \geq n_0$ et toute racine n^{e} de l'unité $s \in \mathbb{C}$, $f(s)$ est encore une racine n^{e} de l'unité.
3. Étudier la même question pour des extensions finies de \mathbb{Q} . Par exemple, lorsque $K = \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$, trouver toutes les fractions rationnelles $f \in K(x)$ qui préservent l'ensemble des racines n^{es} de l'unité pour tout entier positif n suffisamment grand.

10. Racines multiples

Soient K un corps, $K[x]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans K . Pour un polynôme $Q \in K[x]$ et une de ses racines $a \in K$, la *multiplicité* de a est le plus grand entier m tel que $(x - a)^m$ divise Q . Une racine a est dite *multiple* si sa multiplicité est au moins 2.

1. On prend le corps $\mathbb{F}_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$ des restes modulo un premier p . Pour un $n \in \mathbb{N}$, on note α_n la probabilité qu'un polynôme $Q \in \mathbb{F}_p[x]$ de degré n ait une racine multiple dans \mathbb{F}_p . Trouver α_n ou en donner une estimée. Quelle est la limite de α_n lorsque $n \rightarrow \infty$?
2. Mêmes questions pour une extension finie de \mathbb{F}_p .
3. Pour a, b, c et d des nombres complexes, on définit la suite de polynômes $P_n(x) \in \mathbb{C}[x]$ par

$$P_1(x) = ax + b \quad \text{et} \quad P_n(x) = x(P_{n-1}(x) + P_{n-1}(cx + d)) \quad \text{pour tout } n \geq 2.$$

- a) Trouver tous les $n \in \mathbb{N}$ tels que le polynôme $P_n(x)$ a une racine multiple.

- b) Trouver tous les $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que **aucun** des polynômes $P_n(x)$ n'ait une racine multiple.
- c) Étudier le problème analogue lorsque le polynôme $P_1(x)$ n'est plus linéaire. On peut aussi étudier la suite définie par la récurrence

$$P_n(x) = Q(x) \cdot (P_{n-1}(x) + P_{n-1}(cx + d)), \quad n \geq 2,$$

où $Q(x)$ est un polynôme à coefficients dans \mathbb{C} .

4. Suggérer et étudier d'autres directions de recherche.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ PARIS-SUD 11, 91405 ORSAY CEDEX, FRANCE

E-mail address: organisateurs@tfjm.org

URL: <http://www.tfjm.org/>