$\mathbb{TFJM}^2$

PROBLÈMES DU 6ÈME TOURNOI FRANÇAIS DES JEUNES MATHÉMATICIENNES ET MATHÉMATICIENS

VERSION 1.4

Préambule

Ces problèmes sont difficiles et sont proposés par des chercheurs et étudiants en mathématiques. Ils n'admettent pas toujours, à la connaissance du jury, de solution complète et sont accessibles à des lycéens, c'est-à-dire que les auteurs sont certains qu'un travail de recherche élémentaire peut être mené sur ces problèmes. Le jury n'attend pas des candidats qu'ils résolvent entièrement un problème, mais qu'ils en comprennent les enjeux, résolvent des cas particuliers, repèrent les difficultés et proposent des pistes de recherche. Attention, les questions ne sont pas toujours classées par ordre croissant de difficulté. Enfin, il n'est pas nécessaire de traiter tous les problèmes : chaque équipe peut en refuser un certain nombre sans pénalité. On se reportera au règlement pour plus de détails.

* * *

Table des matières

Mots-clés : 1. optimisation — 2. algèbre — 3. jeux, arithmétique — 4. graphes — 5. géométrie — 6. jeux, analyse — 7. combinatoire — 8. probabilités

* * *

Date: 31 décembre 2015.

1. Découpage rapide

Soient m et n des entiers strictement positifs. On souhaite découper une planche sur laquelle est tracée une grille rectangulaire de dimensions $m \times n$. Cette opération se fait en plusieurs étapes, qu'on nomme *coupes*, qui doivent respecter les contraintes suivantes :

(i) On doit commencer à couper depuis le bord d'une pièce.
(ii) On coupe sur les lignes de la grille.
(iii) On coupe en ligne droite.
(iv) La coupe doit se terminer sur une intersection de la grille.
(v) Une fois que la planche est séparée en plusieurs pièces, on ne peut couper qu'une pièce à la fois.

Si l'on découpe d'un bout à l'autre de la pièce, on dit que la coupe est *franche*.

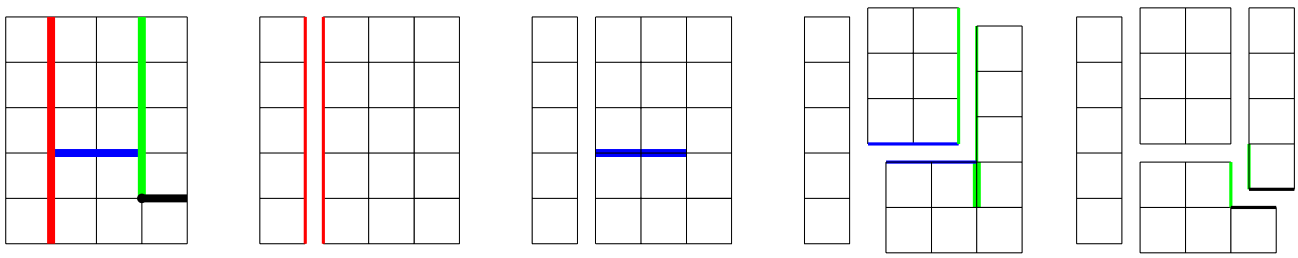

Figure 1. Exemple avec $m = 5$, $n = 4$. On découpe la planche en 4 étapes. À partir de la planche initiale, seul le segmet rouge correspont à une coupe franche. On n'a pas le droit de commencer par couper le segment bleu car il ne commence pas sur un bord. Mais on peut le couper, par exemple, après le rouge.

1. Pour quelles valeurs de m et de n peut-on trouver une partition de la planche en dominos (c'est-à-dire des rectangles de dimensions 2×1 et 1×2) qu'il est impossible d'obtenir avec des coupes franches ?

On se donne une fonction $\tau : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}_+$ qui représentera le temps de découpe : pour effectuer une coupe de la planche sur une longueur I, le temps nécessaire sera $\tau(I)$. Le but de ce problème sera de déterminer comment découper la planche pour obtenir un ensemble de pièces donné le plus rapidement ou le plus lentement possible.

2. On suppose dans cette question qu'on n'effectue que des coupes franches. On cherche ici à découper la planche pour n'obtenir que des carrés de taille 1×1. Trouver le temps minimum nécessaire, noté t_τ, dans les cas suivants :

a) $\tau : x \mapsto x$;
b) $\tau : x \mapsto 1$;
c) $\tau : x \mapsto \sqrt{x}$;
d) $\tau : x \mapsto 2^x$;
e) $\tau : x \mapsto x^2$;
f) $\tau : x \mapsto \frac{1}{x}$.

3. On fixe maintenant un entier k. On appelle un *plan* (noté S) une partition fixée de la planche en k pièces. Pour un plan S et une fonction τ choisis, on note $t_{\tau,S}$ (resp. $T_{\tau,S}$) le temps minimum (resp. maximum) nécessaire pour découper la planche selon le plan S. Répondre aux questions suivantes pour différentes fonctions τ proposées à la question précédente :

a) Trouver S qui minimise $t_{\tau,S}$.
b) Trouver S qui maximise $t_{\tau,S}$.
c) Trouver S qui minimise $T_{\tau,S}$.

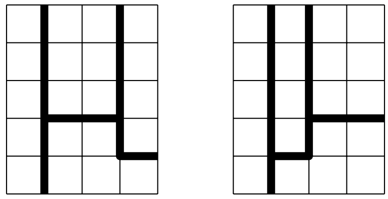

Figure 2. Exemple de deux plans différents mais équivalents, avec $m = 4$, $n = 5$, $k = 4$. Une façon d'obtenir la découpe du plan de gauche est décrite dans la figure 1, mais ce n'est pas la seule.

d) Trouver S qui maximise $T_{\tau,S}$.

4. Étant donné un plan S, on dit qu'un plan S' est *équivalent* si les pièces obtenues après la découpe de S et S' sont les mêmes (à rotation et symétrie près). Pour un entier k fixé, un plan S de k pièces et une fonction τ choisis, on note $\overline{t_{\tau,S}}$ (resp. $\overline{T_{\tau,S}}$) le temps minimum (resp. maximum) nécessaire pour découper la planche selon un plan équivalent à S. Reprendre la question précédente avec $\bar{t}$ et $\overline{T}$.

5. Étudier des généralisations du problème.

* * *

2. Look and say

John aime jouer avec les nombres. Étant donné un entier n, il décompose les chiffres de n en groupes (non vides) qui correspondent à des séquences successives identiques. Puis, il réécrit ce nombre comme s'il le lisait par groupes. Il juxtapose la suite de chiffres et obtient ainsi un nouvel entier : on dit qu'il s'agit d'une *synthèse* de n.

Par exemple pour $n = 12312377784545$ il peut choisir les groupes $(123, 123)$, $(7, 7, 7)$, (8) et $(45, 45)$. Ainsi en lisant les groupes on obtient 2 123, 3 7, 1 8 et 2 45. Le nombre 21233718245 est donc une synthèse de n.

Attention, un même nombre peut se synthétiser de plusieurs manières différentes. Par exemple, 133 peut se synthétiser en cinq entiers différents : $(133) = 1133$; $(13)(3) = 11313$; $(1)(33) = 11133$; $(1)(3, 3) = 1123$ et $(1)(3)(3) = 111313$.

On dit que John peut *transformer* l'entier n en l'entier m s'il est possible de l'atteindre par des synthèses successives, c'est-à-dire s'il existe un entier $N \geqslant 1$ et une suite (finie) $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_N$ d'entiers telle que $u_0 = n$, $u_N = m$ et pour tout k, u_{k+1} est une synthèse de u_k.

1. Existe-t-il un entier n tel que n peut se transformer en n ? Si oui, en existe-t-il une infinité ? Sinon, combien en existe-t-il ?

2. Existe-t-il un entier n tel qu'il soit impossible de transformer n en n ? Si oui, en existe-t-il une infinité ? Sinon, combien en existe-t-il ?

3. On fixe n entre 1 et 9. Quels sont les nombres que John peut atteindre en transformant n ?

4. Existe-t-il une constante C telle que tout entier n peut être transformé en un entier m inférieur à C ? Si oui, quelle est la constante C minimale qui vérifie cette propriété ?

On dit que deux entiers m et n sont *amis* si John peut transformer m en n et s'il peut également transformer n en m. De plus, on décide qu'un nombre est toujours ami avec lui-même.

5. Existe-t-il un ensemble infini d'entiers tels que deux quelconques d'entre eux différents ne soient jamais amis ?

John décide d'ajouter une règle : il décide qu'un entier m est une *quasi-synthèse* de n si m est une synthèse de n ou, dans le cas où n commence par un 1, si m est le nombre n auquel on a ôté le premier 1. Par exemple, 133 peut se synthétiser en six entiers différents : ceux qu'on a par synthèse (1133, 11133, 1123, 11313, 111313 comme vu dans l'exemple du début), mais aussi le cas où on enlève le 1 initial, ce qui donne 33. Ceci définit les notions de *quasi-transformation* et *quasi-amitié*.

6. Existe-t-il un ensemble infini d'entiers tels que deux quelconques d'entre eux différents ne soient jamais quasi-amis ?

7. Étudier l'ensemble des nombres atteignables par transformation et quasi-transformation en partant d'un entier n quelconque.

8. Reprendre l'étude en considérant que les nombres sont écrits dans une autre base.

* * *

3. Le juste prix

Soit n un nombre fixé à l'avance et $T : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ une fonction. Igor et Céline jouent à un jeu : Igor choisit un nombre entier a tel que $1 \leqslant a \leqslant n$ et Céline cherche à deviner quel est ce nombre. Pour cela, Céline propose à chaque tour un nombre entier b tel que $1 \leqslant b \leqslant n$. Igor lui répond alors au bout de $T(b)$ secondes.

1. On suppose pour cette question qu'à chaque tour, Igor dit à Céline si $a \neq b$ ou si $a = b$. Le jeu se termine quand Igor répond $a = b$.

(i) Si Céline joue de manière optimale, combien de temps lui faut-il dans le pire des cas ?

(ii) Si Céline joue de manière complètement aléatoire combien de temps lui faut-il en moyenne ? On pourra étudier deux cas : dans le premier cas, à chaque tour elle choisit un nombre uniformément au hasard (et peut donc choisir un nombre déjà choisi) ; dans le deuxième cas, à chaque tour elle choisit un nombre uniformément au hasard parmi ceux qu'elle n'a pas encore proposés.

Dans les deux questions précédentes, étudier les fonctions T suivantes :

a) $T(b) = 1$,
b) $T(b) = 2^b$,
c) $T(b) = b$,
d) $T(b) = b^2$.
e) $T(b) =$ le plus grand diviseur impair de b.
f) $T(b) =$ l'exposant de la plus grande puissance de 2 qui divise b.

2. On suppose pour cette question qu'à chaque tour, Igor dit à Céline si $a < b$, si $a > b$ ou $a = b$. Le jeu se termine quand Igor répond $a = b$. Si Céline joue de manière optimale, combien de temps lui faut-il dans le pire des cas ? Étudier les mêmes fonctions que ci-dessus.

3. On suppose pour cette question qu'à chaque tour, Igor dit à Céline qu'elle a terminé si $a = b$ et sinon il lui indique la valeur du PGCD de a et b. Si Céline joue de manière optimale, combien de temps lui faut-il dans le pire des cas ? Étudier les mêmes fonctions que ci-dessus.

4. Proposer et étudier des variantes du jeu.

* * *

4. Arbres et hydres

Dans ce problème, un arbre à n sommets est par définition un ensemble de n sommets reliés par des arêtes sans cycles (un cycle est une suite d'arêtes deux à deux différentes partant d'un point et y revenant) avec un sommet distingué appelé *racine* et avec un ordre sur les arêtes autour d'un sommet. Par exemple, tous les arbres qui ont 4 sommets sont représentés sur la Figure 3 (il y en 5 différents).

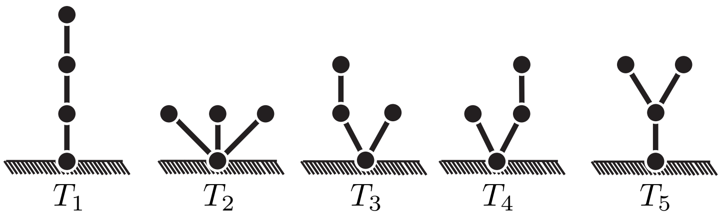

FIGURE 3. Tous les arbres différents à 4 sommets (avec la racine étant le sommet le plus bas). En particulier, T_3 et T_4 sont différents : le premier "enfant" de la racine de T_3 a un enfant, alors que le premier enfant de la racine de T_4 n'a pas d'enfants.

Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes qui relient ce sommet à un autre sommet. La hauteur d'un sommet est sa distance (comptée en nombre d'arêtes) à la racine.

1. Si T est un arbre, on note $\Delta(T)$ la suite formée par le degré du sommet de T de hauteur 0 (c'est-à-dire la racine), puis les degrés des sommets de T de hauteur 1 lus de gauche à droite, puis de hauteur 2 lus de gauche à droite, puis de hauteur 3 lus de gauche à droite, et ainsi de suite. Par exemple, si T_4 est l'arbre défini dans la Figure 3, on a $\Delta(T_4) = (2, 1, 2, 1)$. Montrer que si T et T' sont deux arbres tels que $\Delta(T) = \Delta(T')$, alors $T = T'$.

2. Si T est un arbre, on note $\overline{\Delta}(T)$ la suite obtenue en rangeant dans l'ordre décroissant les éléments de $\Delta(T)$. Par exemple, si T_4 est l'arbre défini dans la Figure 3, on a $\overline{\Delta}(T_4) = (2, 2, 1, 1)$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur une suite $(d_1, \ldots, d_n)$ pour qu'il existe un arbre T tel que $\overline{\Delta}(T) = (d_1, \ldots, d_n)$.

3. Soit $n \geqslant 1$ fixé. Pour une suite $(d_1, \ldots, d_n)$ on note $N(d_1, \ldots, d_n)$ le nombre d'arbres T tels que $\overline{\Delta}(T) = (d_1, \ldots, d_n)$. Par exemple $N(2, 1, 1) = 2$ (voir la Figure 4).

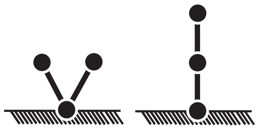

FIGURE 4. On a $N(2, 1, 1) = 2$ car il y a deux arbres T tels que $\overline{\Delta}(T) = (2, 1, 1)$, qui sont représentés ci-dessus.

a) Trouver une expression de $N(d_1, \ldots, d_n)$.

b) On note N_n la plus grande valeur que peut prendre $N(d_1, \ldots, d_n)$. Décrire les suites $(d_1, \ldots, d_n)$ pour lesquelles $N(d_1, \ldots, d_n) = N_n$.

Considérons les sommets d'un polygone régulier à n sommets, numérotés 1, 2, …, n dans l'ordre des aiguilles d'une montre. Par définition, une hydre à n sommets est une manière de relier les n sommets par des segments sans créer de cycles ni d'intersections. Par exemple, voici tous les hydres qui ont 4 sommets :

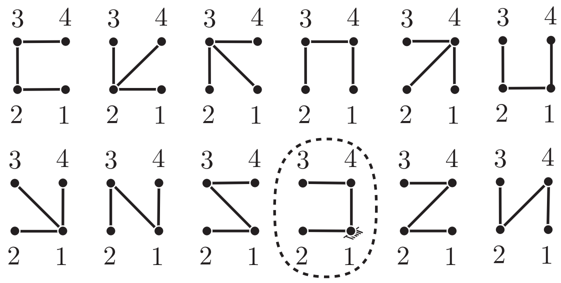

Figure 5. Tous les hydres à 4 sommets (il y a 12 différents en tout).

La *forme* $F(S)$ d'une hydre S est l'arbre obtenu à partir de l'hydre en choisissant le sommet 1 comme racine (et en oubliant la numérotation). Par exemple, la forme de l'hydre entouré sur la Figure 5 est l'arbre T_4 de la Figure 3.

4. Décrire les arbres à n sommets qui sont la forme du plus d'hydres possibles.

5. Si S est une hydre à n sommets, on note

$$\Phi(S) = (\text{degré du sommet } 1,\ \text{degré du sommet } 2, \dots,\ \text{degré du sommet } n).$$

Par exemple, si S est l'hydre entouré sur la Figure 5, on a $\Phi(S) = (2, 1, 1, 2)$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur une suite $(d_1, \dots, d_n)$ pour qu'il existe une hydre S tel que $\Phi(S) = (d_1, \dots, d_n)$.

6. Pour quelles suites $(d_1, \dots, d_n)$ existe-t-il le plus d'hydres S telles que $\Phi(S) = (d_1, \dots, d_n)$?

7. Étudier d'autres propriétés de la fonction Φ et des hydres.

* * *

5. Quand on oublie sa règle ...

Cécile a oublié sa règle aujourd'hui : il ne lui reste qu'un compas pour construire de nouveaux points du plan. On fixe $k \in \mathbb{N}$ et $P_1, P_2, \cdots, P_k$ des points du plan. On note $E = \{P_1, \cdots, P_k\}$.

Cécile part d'un point A du plan. On dit que ce point est atteint. À chaque coup, Cécile trace un cercle de centre l'un des P_i et passant par un point déjà atteint. On dit que les points de ce nouveaux cercles sont atteints. Par exemple, les points que Cécile peut atteindre au bout d'un coup sont les cercles de centre $P_1, P_2, \cdots, P_k$ passant par A. Au deuxième coup, elle peut atteindre tous les cercles de centre un des P_i et passant par un point atteint au premier coup, etc.

On note $G_{n,E}(A)$ l'ensemble des points atteignables en n coups en partant du point A.

1. Déterminer $G_{n,E}(A)$ dans les cas suivants :

a) $k = 1$.

b) $k = 2, 3, 4$.

c) $P_1, \cdots, P_k$ sont alignés.

d) Les P_i sont les sommets d'un k-gone régulier.

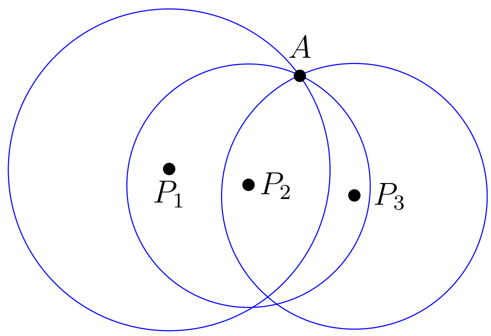

FIGURE 6. Ici, $k = 3$, $E = \{P_1, P_2, P_3\}$ et on a représenté en bleu $G_{1,E}(A)$.

En particulier, on cherchera à déterminer si pour tout point B du plan, il existe n tel que $B \in G_{n,E}(A)$.

On dit qu'un des centres P_i est n-*inutile* si pour tout point A du plan, $G_{n,E}(A) = G_{n,E'}(A)$ avec $E' = E \backslash \{P_i\}$.

2. Quels sont les points n-inutiles dans les cas de la question 1 ? Et en général ? Un point n-inutile est-il nécessairement m-inutile pour tout $m \geqslant n$?

On se donne désormais $l \in \mathbb{N}$ et l points de départ $A_1, \cdots, A_l$. On note $D = \{A_1, \cdots, A_l\}$.

3. Étudier $G_{n,E}(D)$: on pourra reprendre les cas particuliers de la première question.

On dit qu'un point de départ A_j est n-redondant si $G_{n,E}(D) = G_{n,E}(D')$ avec $D' = D \backslash A_j$ (on rappelle que E est fixé).

4. Étudier les points n-redondants (par exemple pour E comme dans les cas de la question 1). Un point n-redondant est-il nécessairement m-redondant pour tout $m \geqslant n$? On pourra s'intéresser à des ensembles D particuliers.

5. Explorer d'autres directions de recherche.

* * *

6. JEU SUR INTERVALLE

Alice et Bob jouent à un jeu sur un cercle. Le cercle est initialement entièrement blanc. Les joueurs jouent tour à tour en commençant par Alice. À son tour, un joueur choisit un arc de cercle (qui peut être vide, ou le cercle entier) et l'autre joueur le place sur le cercle où il le souhaite (en rouge pour Alice et en bleu pour Bob sur la figure 7). Les points blancs recouverts deviennent noirs, et les points noirs recouverts deviennent blancs. Le jeu se finit après n tours, avec n fixé à l'avance. Le gain de Alice, noté G_A, est la proportion du cercle colorée en blanc à la fin. De même, le gain de Bob, noté G_B, est la proportion du cercle colorée en noir à la fin.

1. Suivant la valeur de n, existe-t-il une stratégie permettant à Alice de s'assurer un gain supérieur ou égal à $\frac{1}{2}$? Et pour Bob ?

2. Quel est le gain maximal que peut s'assurer Alice ? On pourra commencer par les cas $n = 2, 3, 4$.

À présent le jeu se joue sur le segment $[0, 1]$, initialement entièrement blanc. À son tour, le joueur choisit un réel t compris entre 0 et 1 (inclus), puis l'autre joueur choisit un intervalle de taille t inclus dans $[0, 1]$ (si $t = 0$ ou $t = 1$ il n'a pas le choix), et les points blancs de cet intervalle deviennent noirs et vice-versa. On définit le gain de même que sur le cercle.

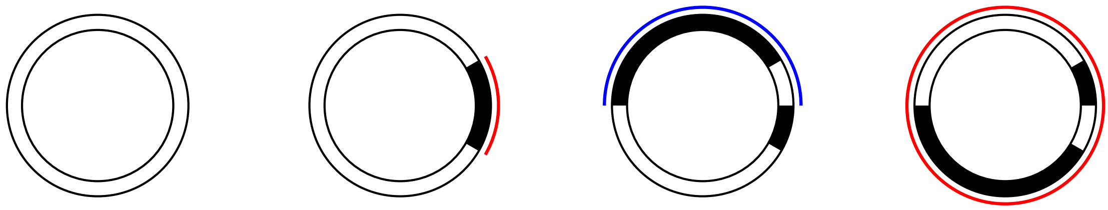

Figure 7. Un exemple avec $n = 3$. Alice choisit un arc de 60°, Bob le place à droite. Puis il choisit un arc de 180°, Alice le place en haut, et enfin Alice choisit le cercle entier de 360° et Bob le place sans avoir le choix. Ici $G_a = G_b = \frac{1}{2}$.

Figure 8. Un exemple avec $n = 3$. Alice choisit $t = 1/3$, Bob place le segment à gauche. Puis il choisit $t = 1/2$, Alice place le segment à droite, et enfin Alice choisit $t = 1$ et Bob n'a pas le choix. Ici $G_a = G_b = \frac{1}{2}$.

Une stratégie est dite « fainéante » si elle consiste pour un joueur à choisir à chaque tour $t = 0$ ou $t = 1$, excepté éventuellement pour son premier tour.

3. Si Alice joue avec une stratégie fainéante, quel est le gain maximal qu'elle peut s'assurer en fonction de n ? Même question pour Bob.

4. En fonction de n, quel est le gain maximal que peut s'assurer Alice si elle applique la stratégie de son choix ? Commencer avec $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$ et essayer d'encadrer ce gain pour n plus grand.

5. Étudier les gains maximaux que peuvent respectivement s'assurer Alice et Bob lorsqu'on impose que les réels t proposés par Alice et Bob soient :

a) De la forme $\frac{1}{k}$ avec k entier,

b) Inférieurs à $\frac{1}{2}$.

6. On joue à présent sur le segment $[0, 1]$ avec 3 couleurs : bleu, blanc, rouge. Si un point bleu est recouvert il devient blanc, le blanc devient rouge et le rouge devient bleu. Le gain de Bob est la proportion de bleu et de blanc, le gain d'Alice est la proportion de rouge.

Étudier le gain maximal qu'Alice peut s'assurer.

7. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

* * *

7. Transformations simples

On considère l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ constitué des deux lettres a et b, on note Σ^* l'ensemble des mots (toujours supposés finis) que l'on peut former en utilisant cet alphabet. Pour un entier $k \geqslant 1$, on note a^k le mot $aa \cdots a$ où a apparaît k fois et, de même, b^k le mot $bb \cdots b$ où b apparaît k fois.

Une *transformation* est une expression de la forme "$m \to n$" où m et n sont deux mots. Étant donnée une transformation $m \to n$, si x et y sont deux mots, on dit qu'on peut passer de x à y si on peut obtenir y à partir de x en remplaçant une apparition de m dans x par n, et dans ce cas on note $x \mapsto y$.

Par exemple, si la transformation est $aba \to bab$, on peut passer de $ababa$ à $babba$ mais aussi de $ababa$ à $abbab$.

On dit qu'une transformation $m \to n$ est *simple* s'il n'existe pas de suite infinie de mots $(m_1, m_2, m_3, \ldots)$ telle que qu'on peut passer de m_k à m_{k+1} pour tout $k \geqslant 1$.

1. Déterminer parmi les transformations suivantes celles qui sont simples :

a) $a^2b \to ba$.
b) $ab^2 \to ba^2$.
c) $ab \to ba$.
d) $a^2b^2 \to b^2a^2$.
e) $ab \to b^2a$.
f) $ab \to ba^2$.
g) $ab \to b^ka$ (où $k \geqslant 1$ est un entier).
h) $ab \to b^2a^2$.
i) $a^2b \to b^2a^3$.

2. Déterminer un critère sur les entiers $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ pour que la transformation $a^\alpha b^\beta \to b^{\beta'}a^{\alpha'}$ soit simple.

3. Trouver tous les entiers $\alpha_1, \beta_1, \alpha'_1, \beta'_1$ et $\alpha_2, \beta_2, \alpha'_2, \beta'_2$ vérifiant les trois conditions suivantes :

(i) la transformation $a^{\alpha_1}b^{\beta_1} \to b^{\beta'_1}a^{\alpha'_1}$ est simple,
(ii) la transformation $a^{\alpha_2}b^{\beta_2} \to b^{\beta'_2}a^{\alpha'_2}$ est simple,
(iii) il existe une suite infinie de mots $(m_1, m_2, \ldots)$ telle que pour tout $k \geqslant 1$ on peut passer de m_k à m_{k+1} en utilisant soit la transformation $a^{\alpha_1}b^{\beta_1} \to b^{\beta'_1}a^{\alpha'_1}$ soit la transformation $a^{\alpha_2}b^{\beta_2} \to b^{\beta'_2}a^{\alpha'_2}$.

4. On utilise maintenant un alphabet à trois lettres $\Sigma = \{a, b, c\}$.

(i) Existe-t-il une suite infinie de mots $(m_1, m_2, m_3, \ldots)$ telle que, pour tout $k \geqslant 1$, on peut passer de m_k à m_{k+1} en utilisant soit la transformation $ab \to ba$, soit la transformation $cb \to bc$?
(ii) Même question si l'on peut maintenant utiliser soit la transformation $ab \to b^3a$, soit la transformation $cb \to bc^2$.
(iii) Même question si l'on peut maintenant utiliser soit la transformation $a^{\alpha_1}b^{\beta_1} \to b^{\beta'_1}a^{\alpha'_1}$ soit la transformation $c^{\alpha_2}b^{\beta_2} \to b^{\beta'_2}c^{\alpha'_2}$.

5. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

* * *

8. Roland-Garros

Soit n un entier non nul. On considère 2^n personnes, notées $J_1, J_2, ..., J_{2^n}$, qui s'affrontent en tournoi. L'issue de chaque match est fixée à l'avance : J_a bat J_b si et seulement si $a < b$. Il n'y a jamais d'égalité.

Tout d'abord, on organise le tournoi comme suit :
- On choisit une permutation σ de $[\![1, 2^n]\!]$ (c'est-à-dire une fonction de $[\![1, 2^n]\!]$ dans $[\![1, 2^n]\!]$ telle que toutes les valeurs à l'arrivée aient exactement un antécédent).
- $J_{\sigma(1)}$ affronte $J_{\sigma(2)}$, $J_{\sigma(3)}$ affronte $J_{\sigma(4)}$,..., $J_{\sigma(2^n-1)}$ affronte $J_{\sigma(2^n)}$.
- Le gagnant du premier match affronte celui du deuxième, celui du troisième affronte celui du quatrième, etc.
- On réitère cette opération n fois, jusqu'à ce que le vainqueur soit proclamé.

On a ainsi déterminé le 1^{er} et le $2^{\text{ème}}$. Entre les deux joueurs ayant perdu en demi-finale, le $3^{\text{ème}}$ est celui qui a perdu contre le 1^{er} et le $4^{\text{ème}}$ contre le $2^{\text{ème}}$. On classe de même les joueurs de 5 à 8 en classant $5^{\text{ème}}$ celui qui a perdu contre le 1^{er}, ..., $8^{\text{ème}}$ celui qui a perdu contre le $4^{\text{ème}}$. On réitère cette opération jusqu'à classer tous les joueurs.

On note C_k le classement de J_k.

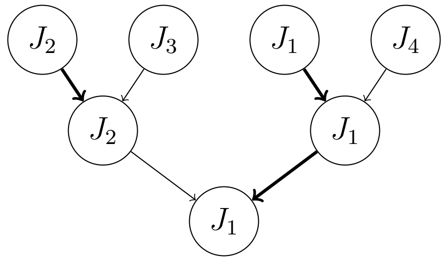

Figure 9. Pour $n = 2$, on prend $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. J_2 gagne le premier match, J_1 gagne le deuxième. J_1 gagne la finale. J_4 a perdu contre J_1, il est donc classé $3^{\text{ème}}$, tandis que J_3 est classé dernier. On a alors $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $C_3 = 4$ et $C_4 = 3$.

1. Pour $k \in [\![1, 2^n]\!]$, quelles sont valeurs que peut prendre C_k ? En particulier, pour quels k l'ensemble des places possibles est-il un intervalle ?

2. Combien est-il possible d'obtenir de classements différents ?

3. Après avoir organisé un tournoi de cette manière, on en organise un deuxième en prenant $\sigma'(k) = C_k$ pour tout $k \in [\![1, 2^n]\!]$. Après ce deuxième tournoi, on en organise de la même manière un troisième selon les résultats du deuxième, etc.

Étudier l'évolution des suites des classements des joueurs. En particulier, déterminer les valeurs possibles de p tel que, à partir d'un certain rang, une suite soit exactement p-périodique.

On change désormais l'organisation du tournoi :
- On choisit une permutation σ de $[\![1, 2^n]\!]$.
- $J_{\sigma(1)}$ affronte $J_{\sigma(2)}$, $J_{\sigma(3)}$ affronte $J_{\sigma(4)}$,..., $J_{\sigma(2^n-1)}$ affronte $J_{\sigma(2^n)}$.
- Le gagnant du premier match affronte celui du deuxième, celui du troisième affronte celui du quatrième, etc. puis le perdant du premier match affronte celui du deuxième, celui du troisième affronte celui du quatrième, etc.
- On réitère cette opération jusqu'à ce que le vainqueur soit proclamé. On a alors un classement complet des joueurs.

4. Reprendre les questions précédentes dans ce cas.

On organise pour les trois questions suivantes un seul tournoi, suivant la deuxième méthode, en prenant σ une permutation aléatoire uniforme de $[\![1, 2^n]\!]$.

5. Pour $k \in [\![1, 2^n]\!]$, étudier l'espérance de la variable aléatoire C_k, notée $\mathbb{E}(C_k)$ (on pourra limiter le calcul explicite à quelques valeurs de k). En particulier, pour quels k a-t-on $\mathbb{E}(C_k) > k$?

6. Pour $k \in [\![1, 2^n]\!]$, on note D_k l'indice du joueur qui a obtenu le classement k. Étudier $\mathbb{E}(D_k)$ (on pourra limiter le calcul explicit à quelques valeurs de k). En particulier, la suite $\mathbb{E}(D_1), \mathbb{E}(D_2), ..., \mathbb{E}(D_{2^n})$ est-elle croissante ? Pour quels k a-t-on $\mathbb{E}(D_k) > k$?

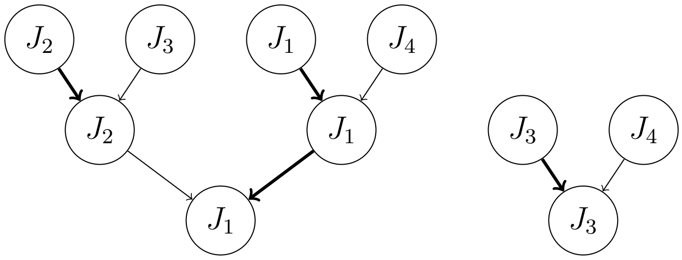

FIGURE 10. Pour $n = 2$, on prend $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. J_2 gagne le premier match, J_1 gagne le deuxième. J_1 gagne la finale. J_3 bat J_4 en petite finale. On a alors $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $C_3 = 3$ et $C_4 = 4$.

7. Pour un classement obtenu donné, on note Δ la somme des carrés des différences entre les classements réels des joueurs et ceux qu'ils ont obtenu, et on dit que Δ est l'écart au classement réel. Déterminer la valeur maximale que peut prendre Δ, ainsi que $\mathbb{E}(\Delta)$.

8. Étudier d'autres propriétés de ces tournois.

* * *

Adresse mail : `problemes@tfjm.org`
URL : `www.tfjm.org`