$\mathbb{TFJM}^2$

Problèmes du 7ème Tournoi Français des Jeunes Mathématiciennes et Mathématiciens

VERSION 1.2 MISE À JOUR LE 27 JANVIER 2017

Préambule

Ces problèmes sont difficiles et sont proposés par des chercheurs et étudiants en mathématiques. Ils n'admettent pas toujours, à la connaissance du jury, de solution complète et sont accessibles à des lycéens, c'est-à-dire que les auteurs sont certains qu'un travail de recherche élémentaire peut être mené sur ces problèmes. Le jury n'attend pas des candidats qu'ils résolvent entièrement un problème, mais qu'ils en comprennent les enjeux, résolvent des cas particuliers, repèrent les difficultés et proposent des pistes de recherche. Attention, les questions ne sont pas toujours classées par ordre croissant de difficulté. Enfin, il n'est pas nécessaire de traiter tous les problèmes : chaque équipe peut en refuser un certain nombre sans pénalité. On se reportera au règlement pour plus de détails.

 En cas de questions concernant le tournoi ou les énoncés, consulter le site `www.tfjm.org` ou contacter les organisateurs à l'adresse `contact@tfjm.org`.

Table des matières

Mots-clés : 1. combinatoire, coloriages — 2. géométrie — 3. géométrie, systèmes dynamiques — 4. graphes — 5. géométrie, jeux — 6. logique, combinatoire — 7. analyse, arithmétique, jeux — 8. combinatoire — 9. optimisation.

Notations

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$	ensemble des entiers positifs
$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$	ensembles des nombres entiers et rationnels
$\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$	droite réelle, plan
$\lvert E \rvert$	cardinal de l'ensemble E (nombre d'éléments de E, si E est fini)
$[a, b]$, $]a, b[$	intervalle fermé et ouvert de $\mathbb{R}$
$\lfloor x \rfloor$	partie entière du réel x (plus grand entier inférieur ou égal à x)

1. Le retour des labyrinthes

On considère un *grand carré* de côté $n \in \mathbb{N}^*$, quadrillé par des *petits carrés* de côté 1. Dans chaque petit carré, on trace une et une seule diagonale qui délimite deux *petits triangles.* On appelle *labyrinthe de taille* n la donnée de ces tracés. Les petits segments divisent le bord du grand carré en segments de longueur 1, numérotés de 1 à $4n$ comme sur la figure 1. On appelle *chemin* de i à j une suite de petits triangles $(t_1, \ldots, t_\ell)$ deux à deux distincts tels que :

— t_i et t_{i+1} ont exactement un côté en commun qui n'est pas l'une des diagonales tracées ;

— le segment i est un côté de t_1 et le segment j est un côté de t_ℓ.

On dit que ℓ est la *longueur* du chemin de i à j. On appelle *profondeur* d'un labyrinthe la longueur maximale d'un chemin du labyrinthe. On appelle *complexité* d'un labyrinthe la somme de toutes les longueurs des chemins.

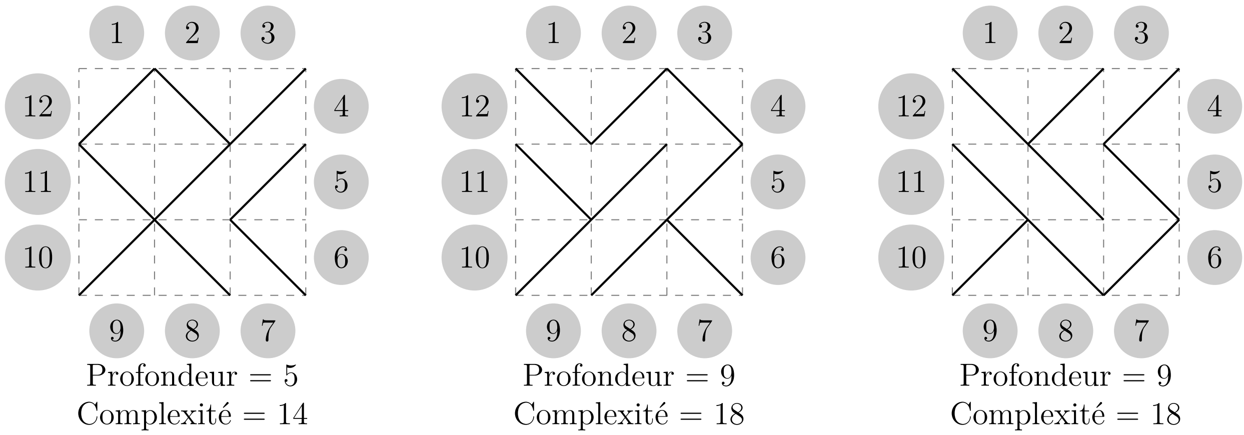


Figure 1. Trois exemples de labyrinthes pour $n = 3$.

On dit que deux labyrinthes sont de même type s'il est possible de passer de l'un à l'autre par une rotation du grand carré. Par exemple, parmi les trois labyrinthes ci-dessus, celui au centre est du même type que celui de droite, mais n'est pas du même type que celui de gauche.

1. Étant fixée la taille n du labyrinthe, combien existe-t-il

a) de labyrinthes ?

b) de types différents de labyrinthes ?

2. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Quelles sont les valeurs possibles pour la complexité d'un labyrinthe de taille n ?

b) Quelles sont les valeurs minimales et maximales pour la profondeur ?

Étant donné un labyrinthe L de taille n, on classifie les entiers de 1 à $4n$ de sorte que i et j sont dans la même *classe* lorsqu'ils sont reliés par un chemin dans le labyrinthe L. On appelle *partition de* L l'ensemble de ces classes.

3. Trouver des conditions nécessaires ou suffisantes pour qu'étant donnée une partition de $\{1, \ldots, 4n\}$, il existe un labyrinthe dont c'est la partition.

On dit que deux chemins $(t_1, \ldots, t_\ell)$ et $(t'_1, \ldots, t'_{\ell'})$ sont adjacents s'il existe des triangles t_p et t'_q ayant une diagonale tracée en commun. On colorie les chemins avec différentes couleurs (comme dans la Figure 2) : on appelle *nombre chromatique* d'un labyrinthe L, noté χ_L, le nombre minimal de couleurs pour que deux chemins adjacents de L soient de couleurs différentes.

4. Quelles valeurs peut prendre le nombre chromatique d'un labyrinthe de taille $n \in \mathbb{N}^*$ fixée ?

5. Proposer et explorer d'autres pistes, éventuellement sur d'autres labyrinthes.

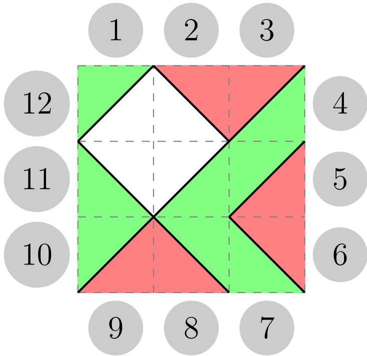


FIGURE 2. Pour ce labyrinthe, $n = 3$ et $\chi_L = 2$.

* * *

2. L'arbre qui cache la forêt

Gaston le mouton est enfermé dans un enclos au milieu de la forêt. En regardant les arbres qui l'entourent, il remarque que certains arbres ne sont pas visibles depuis tous les points de l'enclos. Par exemple, sur la figure, lorsque Gaston se place en G, l'arbre X cache l'arbre Y. Gaston décide alors de compter les arbres qu'il ne pourra jamais faire disparaître de son champ de vision.

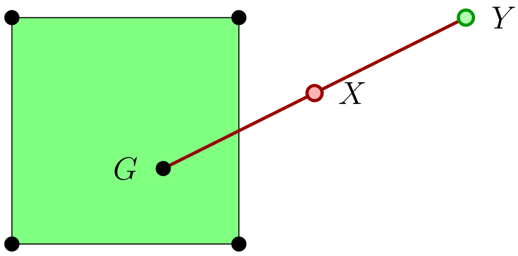


FIGURE 3. Lorsque Gaston est en G il ne voit pas Y.

L'enclos de Gaston est noté E et délimité par des piquets, placé sur des points du plan à coordonnées entières. On considère que les piquets font partie de l'enclos et ne cachent pas les arbres. On suppose de plus que E est convexe, c'est-à-dire que si deux points G_1 et G_2 sont dans E, alors tout le segment $[G_1G_2]$ est inclus dans E. On suppose que la forêt est constituée des arbres plantés sur chaque point à coordonnées entières qui ne fait pas partie de l'enclos, soit $\mathbb{Z}^2 \setminus E$. On note $G(E)$ l'ensemble des arbres que Gaston ne peut pas faire disparaître de son champ de vision.

1. Déterminer $G(E)$ dans les cas suivants :

a) E est un triangle rectangle isocèle de côté 1.

b) E est un point.

c) E est un segment de longueur 1.

d) E est un segment de longueur $\sqrt{2}$.

e) E est un rectangle de côté parallèle aux axes.

f) E est un triangle rectangle dont les petits côtés sont parallèles aux axes.

2. Pour un entier n donné, peut-on trouver E tel que $|G(E)| = n$?

3. Quelles valeurs peut prendre $|G(E)|$ pour E d'aire $\frac{1}{2}$? Pour E d'aire 1 ?

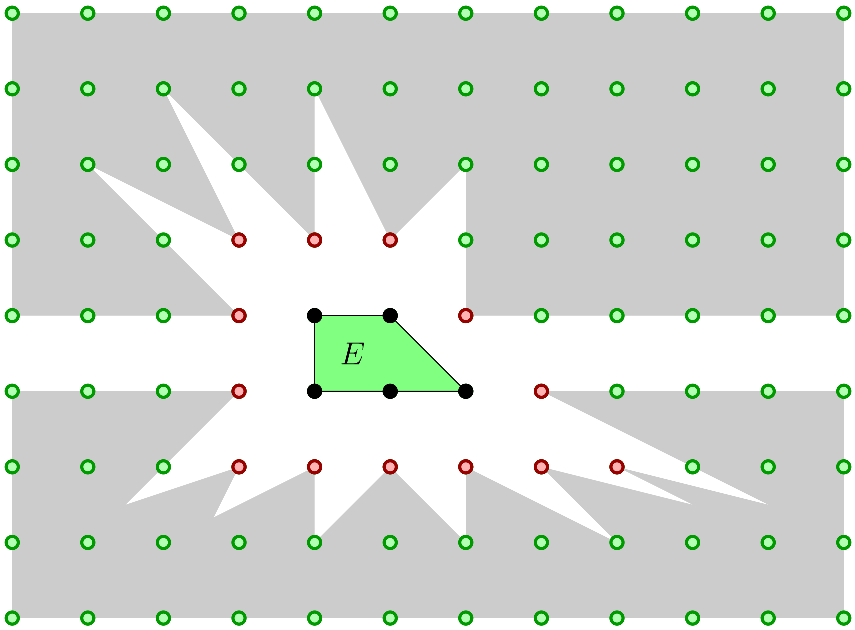


FIGURE 4. $G(E)$ est constitué des 13 arbres rouges. Pour tous les autres arbres, Gaston peut trouver un point de son enclos d'où il ne verra pas cet arbre.

4. Dans quels cas $G(E)$ est-il fini ? Dans ce cas, peut-on borner la taille de $G(E)$ en fonction des caractéristiques de E (nombre de sommets, nombre de points dans E, sur les bords de E, périmètre, aire ...) ? Peut-on caractériser $G(E)$ précisément de façon géométrique ? de façon algébrique ?

5. Étant donné un sous-ensemble F de $\mathbb{Z}^2$, que dire des sous-ensembles E du plan vérifiant $G(E) = F$? Peut-on déterminer si un tel ensemble E existe ?

On fixe un sous-ensemble E_0 du plan et on définit la suite d'ensembles $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation de récurrence $E_{n+1} = \mathrm{Conv}(G(E_n))$. Ici, $\mathrm{Conv}(A)$ désigne l'enveloppe convexe de l'ensemble A, c'est-à-dire le plus petit ensemble C contenant A tel que, si deux points X et Y sont dans C, alors tout le segment $[XY]$ est inclus dans C.

6. Que peut-on dire de la suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Est-ce que l'union des ensembles E_n est égale à l'ensemble du plan ? Peut-on déterminer comment se comporte la suite $(|G(E_n)|)_{n\in\mathbb{N}}$?

7. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

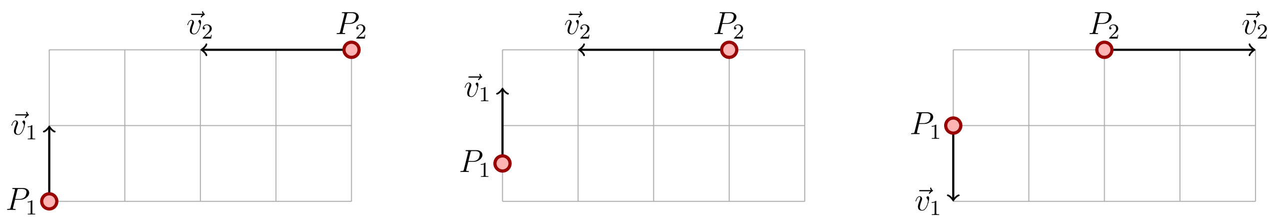
* * *

3. Téléphones à crabes

Au fond des océans, il existe une espèce de crabes bien particuliers. Chacun se déplace toujours en ligne droite, à vitesse constante. Lorsque plusieurs crabes se rencontrent en un même point, chacun fait demi-tour et continue de se déplacer sur la droite qui lui a été assignée à la naissance, à la même vitesse mais en sens inverse.

Un crabe est caractérisé à l'instant t par sa position $P(t) \in \mathbb{R}^2$ (en coordonnées cartésiennes du plan) et sa vitesse (non-nulle) $\vec{v}(t) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Chaque crabe est donc identifié à un couple. $C(t) = (P(t), \vec{v}(t))$. On appelle *disposition à n crabes* $\big(C_1(t), \dots, C_n(t)\big)$ la donnée d'un n-uplet de crabes $C_i(t) = (P_i(t), \vec{v_i}(t))$ deux à deux distincts. On note $v_i = \|\vec{v_i}(t)\|$ la valeur de la vitesse du i-ème crabe, qui ne dépend pas de t.

On dit qu'une disposition à n crabes est *stable* s'il existe un réel strictement positif $T \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\big(C_1(T), \dots, C_n(T)\big) = \big(C_1(0), \dots, C_n(0)\big)$, c'est-à-dire que chaque crabe a retrouvé sa



$t = 0$

$$\begin{cases} C_1 = ((0,0),(0,1)) \\ C_2 = ((4,2),(-2,0)) \end{cases}$$

$t = 0.5$

$$\begin{cases} C_1 = ((0,0.5),(0,1)) \\ C_2 = ((3,2),(-2,0)) \end{cases}$$

$t = 3$

$$\begin{cases} C_1 = ((0,1),(0,-1)) \\ C_2 = ((2,2),(2,0)) \end{cases}$$

FIGURE 5. Un exemple avec deux crabes.

position initiale et part dans le même sens ; un tel $T > 0$ est une *période* de la disposition. On appelle *tempo* de la disposition sa plus petite période.

1. Soit $v, T > 0$. Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$ existe-t-il une disposition stable à n crabes et de tempo T, telle que $v = v_1 = \cdots = v_n$?

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Existe-t-il une disposition stable à n crabes dont la famille des constantes v_i vérifie les inégalités $v_i > 2v_{i+1}$?

b) Pour quelles familles de constantes $(v_1, \ldots, v_n)$ existe-t-il une disposition stable à n crabes ?

On dit qu'une disposition à n crabes est :

— *asymptotiquement stable* si elle est stable à partir d'un certain temps, à savoir qu'il existe $T, u > 0$ tels que pour tout i, $C_i(T+u) = C_i(u)$;

— *semi-stable* si la situation initiale subit une translation à intervalles de temps réguliers, c'est-à-dire qu'il existe $T > 0$ et un vecteur $\vec{L}$ tel que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ on a $P_i(T) = P_i(0) + \vec{L}$ et $\vec{v}_i(T) = \vec{v}_i(0)$;

— *bornée* si aucun crabe ne s'éloigne arbitrairement du point $(0,0)$, c'est-à-dire qu'il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et tout $t > 0$ la distance entre $(0,0)$ et $P_i(t)$ soit d'au plus M.

3. a) Une disposition bornée est-elle nécessairement stable ?

b) Dans une disposition bornée, chaque crabe a-t-il nécessairement un mouvement périodique ?

4. a) Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$ existe-t-il une disposition asymptotiquement stable mais pas stable ?

b) Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$ existe-t-il une disposition semi-stable mais pas stable ?

On appelle *degré* d'une configuration stable le plus grand entier d tel qu'à chaque instant où 2 crabes se rencontrent, au moins d crabes se rencontrent.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quel est le plus petit degré possible pour une configuration stable à n crabes ?

Les crabes étant des êtres sociables, ils s'échangent l'intégralité de leurs connaissances chaque fois qu'ils se rencontrent. On considère une disposition stable à n crabes.

Initialement, chaque crabe ne connaît que lui-même. Lors d'une rencontre (qui peut avoir lieu à $t = 0$), chaque crabe y prenant part donne aux crabes qu'il rencontre l'intégralité de ses connaissances et reçoit les leurs. On dit qu'une disposition stable à n crabes est un *téléphone à*

n *crabes* s'il existe un temps T auquel chaque crabe connaît tous les autres. On appelle *latence* du téléphone à crabes la plus petite valeur $T_2 > 0$ possible d'un tel T.

6. Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$ existe-t-il un téléphone à n crabes ?

7. On note T_1 le tempo d'une disposition et T_1' la plus petite période d'un crabe de la disposition.

a) Quelles valeurs peut prendre le rapport T_2/T_1 ?

b) Quelles valeurs peut prendre le rapport T_2/T_1' ?

8. Qu'en est-il lorsque les vitesses des crabes suivent uniquement des verticales ou des horizontales ?

9. Suggérer et étudier d'autres directions de recherche.

* * *

4. Coupes d'arbres

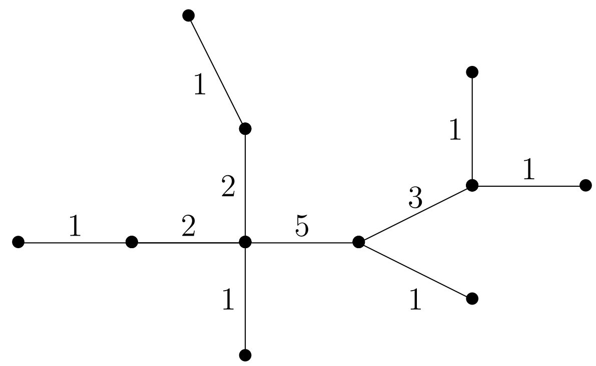


FIGURE 6. Un exemple avec $n = 11$. On a ici $\mathscr{C}(T) = \{1, 2, 3, 5\}$.

On appelle *graphe* un ensemble de sommets et d'arêtes, deux sommets étant voisins lorsqu'ils sont reliés par une arête. On appelle *arbre* un graphe connexe (c'est-à-dire tel qu'il existe toujours un chemin entre deux sommets quelconques) et sans cycle (ce chemin est unique si on interdit de passer deux fois par un même sommet).

Soit $n \geqslant 2$ fixé. Si T est un arbre à n sommets et e une de ses arêtes, en coupant l'arête e, on obtient deux arbres T_1 et T_2. On écrit sur l'arête e le nombre de sommets du plus petit des deux arbres T_1 et T_2 (voir figure 6). L'ensemble des nombres ainsi écrits sur les arêtes est appelé *ensemble des coupes* de T et noté $\mathscr{C}(T)$. On dit qu'un sous-ensemble A de $\{1, 2, \ldots, n\}$ est n*-sécable* s'il existe un arbre T à n sommets tel que $\mathscr{C}(T) = A$.

1. Soit $k \geqslant 1$. Pour quelles valeurs de k les ensembles suivants sont-ils n-sécables ?

a) $A = \{k\}$,

b) $A = \{1, k\}$,

c) $A = \{1, 2, \ldots, k\}$.

2. Quels sont le plus grand et le plus petit cardinaux possibles d'un sous-ensemble n-sécable ?

3. Donner des conditions nécessaires et/ou suffisantes pour qu'un sous-ensemble de $\{1, 2, \ldots, n\}$ soit n-sécable.

4. On note c_n le nombre de sous-ensembles n-sécables de $\{1, 2, \ldots, n\}$. La suite $(c_n)_{n\geqslant 0}$ est-elle croissante ? Estimer c_n.

5. Soit $k \geqslant 2$. On dit qu'un arbre est binaire si tous les sommets de l'arbre ont soit 1 soit 3 voisins. On dit qu'un sous-ensemble A de $\{1, 2, \ldots, n\}$ est *binairement* n*-sécable* s'il existe un arbre binaire T à n sommets tel que $\mathscr{C}(T) = A$. Reprendre les questions précédentes dans ce cadre.

6. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche. On pourra par exemple s'intéresser à d'autres catégories d'arbres que les arbres binaires.

* * *

5. Jeu sur le plan

On fixe un entier $n \geqslant 1$. Alice choisit un ensemble E de n points du plan, que Bob doit trouver (il connaît n). Pour cela, à chaque tour, il propose un point P du plan. Alice lui indique alors la droite passant par ce point P et le point de E le plus proche de P (en cas d'équidistance, Alice choisit comme elle veut parmi les points les plus proches de P). Si Bob tombe pile sur un point, elle le lui indique et le retire de E.

Dans un premier temps, on suppose les points de E numérotés de 1 à n, et Alice donne en plus à chaque tour le numéro du point de E le plus proche de P (celui par lequel passe la droite).

1. Bob peut-il s'assurer de trouver tous les points ? Si oui, peut-il se l'assurer en un nombre fixé de tours ? Si oui, quel est le nombre minimal de tours nécessaire ? On pourra commencer par traiter les cas $n = 1, 2$, et trouver un encadrement aussi précis que possible dans le cas général.

2. Désormais, Alice ne répond plus le numéro du point le plus proche. Reprendre la question précédente.

3. Désormais, lorsqu'un point est trouvé, Alice ne le retire pas de E et il peut donc être le point le plus proche pour les demandes suivantes. Reprendre les questions précédentes.

4. Désormais, on suppose qu'Alice ne peut placer ses points que dans le disque unité. Bob peut néanmoins toujours proposer ses points où il le souhaite. Reprendre les questions précédentes.

5. Lassée des droites, Alice indique maintenant le cercle centré sur le point de Bob et passant par le point le plus proche de P. Reprendre les questions précédentes.

6. A chaque tour, Bob choisit s'il veut qu'Alice lui réponde le cercle ou la droite. Reprendre les questions précédentes.

7. Proposer et explorer d'autres pistes de recherche.

* * *

6. Et les menteurs, mon cher Watson ?

Il y a eu un vol au village. La police enquête. Il existe trois types de suspects :

— les *vériteurs*, qui disent toujours la vérité,

— les *menteurs*, qui mentent systématiquement,

— les *lunatiques*, qui, à chaque fois qu'on les interroge, répondent ce qu'ils veulent.

On note $\mathcal{C}_{v,\ell,m}$ l'ensemble des configurations possibles avec v vériteurs, ℓ lunatiques et m menteurs. Par exemple, $\mathcal{C}_{1,0,1}$ contient deux configurations possibles : si les suspects sont Alice et Bob, soit Alice est vériteur et Bob est menteur, soit c'est l'inverse.

L'inspecteur connaît les entiers v, ℓ et m. Pour résoudre son enquête, il doit déterminer à quelle catégorie appartient chacun des suspects, c'est-à-dire quelle est la configuration réelle, notée K par la suite.

Pour un sous-ensemble $A \subset \mathcal{C}_{v,\ell,m}$, on note Q_A la question : « La configuration K appartient-elle à A ? » Chaque jour, l'inspecteur interroge un suspect en lui posant une question de la forme Q_A. Il doit déterminer K en minimisant la durée de l'enquête (dans le pire des cas). Il peut interroger tous les suspects et leur poser autant de questions qu'il le souhaite.

On note $q_{v,\ell,m}$ le plus petit entier q tel que l'inspecteur peut s'assurer de terminer l'enquête en au plus q jours. On pose $q_{v,\ell,m} = +\infty$ s'il n'existe pas de tel entier.

1. Pour $n = 2, 3, 4$, déterminer $q_{v,\ell,m}$ pour tous v, ℓ, m tels que $v + \ell + m = n$.

On suppose pour les questions 2), 3) et 4) qu'il n'y a pas de menteurs, c'est-à-dire $m = 0$.

2. a) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $q_{v,\ell,0}$ soit fini.

b) Dans ce cas, estimer $q_{v,\ell,0}$. On pourra chercher un encadrement de la forme $f(v,\ell) \leqslant q_{v,\ell,0} \leqslant c(\ell) \times f(v,\ell)$, voire de la forme $f(v,\ell) \leqslant q_{v,\ell,0} \leqslant c(\ell) + f(v,\ell)$ avec $c(\ell)$ aussi petit que possible.

Pour les questions 3 et 4, les suspects ne se connaissent pas tous, mais tout le monde connaît les valeurs de v, ℓ et m. L'inspecteur sait qui connaît qui. Il pose désormais à un suspect une question Q'_A avec $A \subset \mathcal{C}_{v,\ell,m}$: « Es-tu sûr(e) que la configuration K appartient à A ? »

Par exemple, pour $(v, \ell, m) = (3, 1, 0)$. Antoine, Bernardo et Cécile sont des vériteurs et David est un lunatique. Antoine connaît Bernardo mais ni Cécile ni David. Soit K_1 la configuration « Antoine, Bernardo et Cécile vériteurs et David lunatique » et K_2 la configuration : « Antoine, Bernardo et David vériteurs et Cécile lunatique ». Alors Antoine répond « Non » aux questions $Q_{\{K_1\}}$ et $Q_{\{K_2\}}$, et « Oui » à la question $Q_{\{K_1,K_2\}}$.

3. On fixe $p \in \mathbb{N}$. Les suspects sont disposés en cercle. Chacun connaît ses p voisins de gauche et ses p voisins de droite. Reprendre la question 2 dans ce cas.

4. On fixe $p \in \mathbb{N}$. Les suspects forment une grille carrée $n \times n$. Chacun connaît les suspects à distance au plus p, où la distance entre les points repérés par (x, y) et (z, w) est $|x-z|+|y-w|$, comme illustré sur la figure. Reprendre la question 2 dans ce cas.

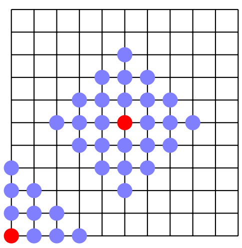


FIGURE 7. Illustration de la distance pour $p = 3$, $n = 11$:
les connaissances des points rouges sont représentées en bleu.

5. L'inspecteur change de méthode d'investigation. On fixe un entier r impair. L'inspecteur choisit chaque jour une question et r suspects parmi les n. Le Dr. Watson leur pose cette question puis donne à l'inspecteur la réponse majoritaire sans plus de détail. Reprendre l'étude précédente dans ce cas. On ne suppose plus que $m = 0$.

6. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

* * *

7. NOMBRE MYSTÈRE

Alice choisit un réel $x \geqslant 0$ et Bob cherche à l'estimer.

Alice commence par lui donner la valeur de $a_0 = \lfloor x \rfloor$. Bob choisit alors un réel $b_1 \geqslant 0$, Alice lui répond $a_1 = \lfloor b_1 x \rfloor$; Bob choisit un réel $b_2 \geqslant 0$, Alice lui répond $a_2 = \lfloor b_2 x \rfloor$; etc.

À chaque fois que Bob choisit b_n, il calcule p_n, le nombre de réponses possibles qu'il pourrait obtenir (connaissant les valeurs a_i précédentes). Par exemple, si Alice indique d'abord $a_0 = 1$, Bob sait que $x \in [1, 2[$. Si Bob choisit ensuite $b_1 = 2.5$, comme $b_1 x \in [2.5, 5[$, Alice peut alors répondre 2, 3 ou 4, donc $p_1 = 3$.

1. Soit (u_n) une suite quelconque d'entiers. Bob peut-il s'assurer d'obtenir $p_n = u_n$ pour tout $n \geqslant 1$?

2. On fixe un réel $\varepsilon > 0$. Bob cherche à estimer x en obtenant un encadrement de la forme $x_0 \leq x \leq x_0 + \varepsilon$. Chaque fois que Bob demande une valeur à Alice, il doit payer c_n. Bob cherche à estimer x en minimisant le coût total dans le pire des cas.

Déterminer le coût minimal que Bob peut s'assurer en fonction de ε lorsque :

a) $c_n = a_n$

b) $c_n = b_n$

c) $c_n = \ln(1 + b_n) + 1$

d) $c_n = p_n - 1$

e) $c_n = p_n$

f) $c_n = p_n + A$ avec $A \in \mathbb{R}_+$.

3. On fixe $n \in \mathbb{N}$. Reprendre la question précédente en fonction de n lorsqu'on impose $\lfloor x \rfloor = n$.

4. On impose maintenant la suite (b_n) et Alice choisit x pour faire varier (p_n). Étudier les suites possibles lorsque :

a) $b_n = k^n$ avec $k \in \mathbb{N}^*$;

b) $b_n = k^{n/d}$ avec $k, d \in \mathbb{N}^*$;

c) $b_n = t^n$ avec $t \in \mathbb{R}_+^*$.

On pourra commencer par déterminer l'ensemble des k-uplets de la forme $(p_{k_0+1}, \ldots, p_{k_0+k})$ avec $k_0 \in \mathbb{N}$ pour k fixé.

5. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

* * *

8. Organiser un tournoi efficace

On organise un tournoi de mathématiques entre N joueurs, avec $N \in \mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe un ordre total sur les joueurs, de sorte que, si $A < B$, le $A^{\text{ème}}$ meilleur joueur bat toujours le $B^{\text{ème}}$ meilleur joueur. De plus, on suppose que cet ordre est strict, c'est-à-dire qu'il n'existe pas deux joueurs de niveau égal. Notre but est d'identifier les K meilleurs joueurs, c'est-à-dire de déterminer, pour tout $A \leqslant K$, quel est le $A^{\text{ème}}$ meilleur joueur. Pour des raisons sportives, chaque joueur peut affronter au plus un adversaire par jour. On souhaite donc organiser les matches de telle sorte que le tournoi dure le moins de jours possibles : on notera $J(K, N)$ la plus petite durée possible du tournoi.

1. Que vaut $J(1, N)$? On pourra commencer par traiter des valeurs de $N \leqslant 10$.

2. Que valent $J(2, N)$? $J(3, N)$? $J(N, N)$? $J(K, N)$ dans le cas général ?

Joon a longuement observé les joueurs durant leur entraînement. Il vous a indiqué ce qu'il pense être le classement *réel* de chaque joueur. Muni de cette information supplémentaire, vous souhaitez donc organiser des matches, tels que :

— si Joon a tort, le tournoi ne dure pas plus de $J(K, N)$ jours ;

— s'il a raison, le tournoi dure au plus $J'(K, N)$ jours, où $J'(K, N)$ est aussi petit que possible.

3. Que vaut $J'(K, N)$?

4. Si on organise le tournoi simplement pour vérifier si Joon avait raison, combien de jours dure-t-il au minimum ?

Matthieu propose de faire s'affronter les joueurs lors de poules de 3 ou 4 joueurs : à l'issue de chaque poule, on connaît les classements relatifs de chacun des joueurs de la poule. De même que précédemment, chaque joueur ne peut participer à plus d'une poule par jour.

5. Reprendre les questions 1 à 3 en supposant que, au lieu de mettre en place des matches 1 vs 1, on met en place des poules de 3 ou 4 joueurs.

6. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

* * *

9. L'interconnexion n'est pas assurée

On considère une ligne de RER formée de $n+1$ stations consécutives, sur laquelle circulent k trains. Chaque train fait des aller-retours sur la ligne en s'arrêtant à certaines stations (chaque train s'arrête aux mêmes stations dans les deux sens). Un *plan d'exploitation* est une manière de choisir l'ensemble des stations où chaque train s'arrête. On suppose que le temps mis par un voyageur pour aller d'une station i à une station j est égal au nombre de fois où son train s'arrête entre i et j en comptant j mais pas i (voir la figure 8). Le *temps de transport minimal* entre i et j, noté $t(i,j)$, est le temps que met un voyageur pour aller de i à j en choisissant le train pour lequel le voyage est le plus rapide. Enfin, on définit le *diamètre* du plan d'exploitation comme le temps de transport minimal le plus long, soit $\max_{0\leqslant i<j\leqslant n} t(i,j)$.

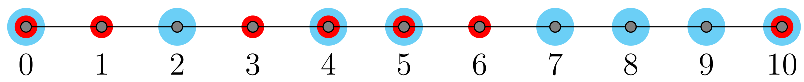


Figure 8. Un exemple de plan d'exploitation avec $n = 10$ et $k = 2$. Le temps de transport de la station 4 à la station 10 est de 5 par le train bleu et 3 par le train rouge. Le temps de transport minimal entre 4 et 10 est donc 3. Le diamètre du plan d'exploitation est infini car il n'est pas possible d'aller de 3 à 9.

Igor, fraîchement nommé directeur de la RATP, cherche un plan d'exploitation de diamètre le plus petit possible avec k et n fixés.

1. Si le diamètre du plan d'exploitation est fini, y a-t-il nécessairement un train qui dessert toutes les stations ?

2. Estimer le diamètre minimal du plan d'exploitation dans les cas suivants :

a) $k = 1$,
b) $k = 2$,
c) $k = 3$,
d) $k \geqslant n^2$,
e) $k = n$,
f) n et k quelconques.

3. On suppose maintenant qu'il est possible d'effectuer des correspondances : pour se rendre de i à j, le voyageur peut descendre dans une autre gare pour changer de train. Dans le temps de transport, on ne prend en compte que le temps passé dans les trains (on suppose que les correspondances sont instantanées). Reprendre la question 2 dans ce cadre.

4. On suppose maintenant que la durée d'un trajet dépend également de la distance parcourue : chaque redémarrage prend un temps a et chaque intervalle parcouru entre deux stations prend un temps b. Reprendre la question 2 dans ce cadre.

5. Proposer et étudier d'autres directions de recherche.

* * *