PROBLÈMES DU $3^{ème}$ TOURNOI FRANÇAIS DES JEUNES MATHÉMATICIENNES ET MATHÉMATICIENS

18 – 20 MAI 2013, PALAISEAU (FRANCE)

Table des matières

Mots-clés : 1. combinatoire – 2. géométrie différentielle – 3. systèmes dynamiques – 4. théorie de l'arrêt optimal, probabilités – 5. géométrie plane – 6. théorie additive des nombres – 7. théorie des graphes, coloriage – 8. jeux – 9. théorie des nombres – 10. combinatoire – 11. analyse, itérations.

Notation

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$	ensemble des entiers strictement positifs
$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$	ensembles des nombres entiers, rationels et complexes
$\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$	droite réelle, plan
$[a, b]$, $]a, b[$	intervalle fermé et ouvert de $\mathbb{R}$
$f^k(x)$	$k^{\text{ième}}$ itération de la fonction f au point x
$C(\mathbb{R})$	ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
$\lvert XY\rvert$	longueur du segment XY

Indication

Ces problèmes sont ceux du Tournoi international des jeunes mathématiciens (ITYM). Ce sont des problèmes difficiles qui sont proposés par des chercheurs en mathématiques. Ils ont été sélectionnés sur deux critères : ils n'admettent, à la connaissance du jury, pas de solution complète, et sont accessibles à des lycéens, c'est à dire que les auteurs sont certains qu'un travail de recherche élémentaire peut être fait sur ces problèmes. Le jury n'attend pas des candidats qu'ils résolvent un problème dans son ensemble, mais qu'ils en comprennent les enjeux, résolvent des cas particuliers, repèrent les difficultés, proposent des pistes de recherche. Enfin, il n'est pas nécessaire de traiter tous les problèmes : chaque équipe peut refuser jusqu'à six problèmes sans pénalité.

Contact : *organisateurs@tfjm.org*

Date: 10 Mars 2013.

1. **Pentaminos**

Un *pentamino* est une figure plane composée de cinq carrés unitaires ayant au moins un côté commun.

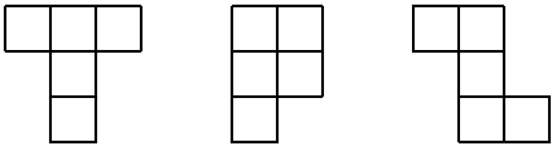
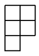
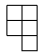
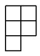
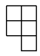


FIGURE 1. The T, P and Z pentominoes.

1. On dit que deux pentaminos sont de même *type* s'ils sont identiques à une rotation ou à une symétrie près. Classifier les pentaminos. Par exemple, les pentaminos  et  sont du même type, sont les mêmes à une symétrie près mais pas à une rotation près.

2. Déterminer s'il est possible de paver le plan réel par un type de pentaminos donné.

3. Considérons le pentamino P, c'est-à-dire  et  ainsi que leurs rotations.

a) Pour quel $n \in \mathbb{N}$ est-il possible de paver un rectangle de taille $5 \times n$ (de le recouvrir sans que deux pièces ne se superposent ni laisser d'espace vide) ?

b) Trouver tous les $m, n \in \mathbb{N}$ pour lesquels il est possible de paver un rectangle de taille $m \times n$.

c) En général, pour des entiers positifs donnés m et n, quel est le nombre maximal de pentaminos P que l'on peut positionner dans un rectangle de taille $m \times n$ selon le quadrillage sans superposition ?

4. Etudier le même problème pour les autres types de pentaminos.

2. **Triangulations stables**

Soit M une surface à deux dimensions, non necessairement sans bord. On note $\Delta(M)$ une *triangulation* de cette surface, c'est-à-dire une partition de M en triangles qui ne se recouvrent pas. Les sommets de ces triangles qui ne se trouvent pas sur le bord sont appelés *sommets internes*. Un exemple de triangulation est donné en Figure 2, où la surface M est un hexagone régulier et $\Delta(M)$ consiste en 19 triangles avec 8 sommets internes.

On dira qu'une triangulation est *stable* si elle satisfait les deux conditions suivantes :

i) pour toute paire de triangles ABC et ABD de la triangulation ayant un côté en commun, on a
$$\frac{|AC|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|BD|},$$

ii) tout sommet interne de $\Delta(M)$ est le sommet d'exactement six triangles.

On considère à présent $\Delta(M)$ une triangulation stable.

1. Considerer une triangulation d'un hexagone convexe ne satisfaisant que la condition *ii*). Combien de sommets internes peut-elle avoir ?

2. Décrire toutes les triangulations stables d'un hexagone régulier.

3. Soient n et k des entiers positifs. Supposons que M est un n-gone régulier et qu'il existe une triangulation stable $\Delta(M)$ avec exactement k sommets internes. Est-il vrai que tous les triangles de $\Delta(M)$ sont alors réguliers ? Commencer par étudier les cas $n = 3, 4, 5$ et des petites valeurs de k.

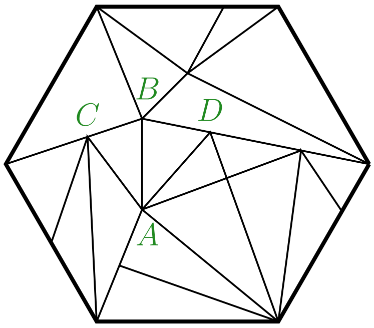


FIGURE 2. Une triangulation d'un hexagone régulier.

4. Si M est une sphère : définir les lignes droites, la longueur d'un segment et l'angle entre deux droites sur la sphère. Etudier les propriétés d'une triangulation stable de M.

5. Si M est le plan réel $\mathbb{R}^2$, tous les triangles de la triangulation $\Delta(M)$ sont-ils nécessairement réguliers ?

6. Considérer d'autres surfaces.

3. **Un billard**

Deux billes de couleur blanche et rouge se trouvent sur une table de billard sans trous. Ronnie veut toucher la bille rouge avec la blanche. Cependant, Mark va poser des billes noires sur la table et son but est d'empêcher Ronnie d'atteindre la bille rouge sans avoir touché une bille noire. Mark peut-il réussir ? Si oui, de combien de billes noires aura-t-il besoin ?

On supposera que les billes sont infinitésimales (comme des points), qu'elles se déplacent en ligne droite et à vitesse constante, que les réflexions sont spéculaires et que la bille blanche n'est pas autorisée à toucher un coin. Mark ne peut poser qu'un nombre fini de billes. Enfin, Mark a le droit de poser des billes noires sur le bord de la table. Considérer les cas où la table de billard prend les formes suivantes :

1. Un carré.

2. Un triangle rectangle.

3. Une table en forme de L (voir Figure 3).

4. Un n-gone régulier, pour $n \in \mathbb{N}$.

5. Un polyomino, *i.e.* une réunion de carrés unitaires ayant au moins un côté commun (voir Figure 3).

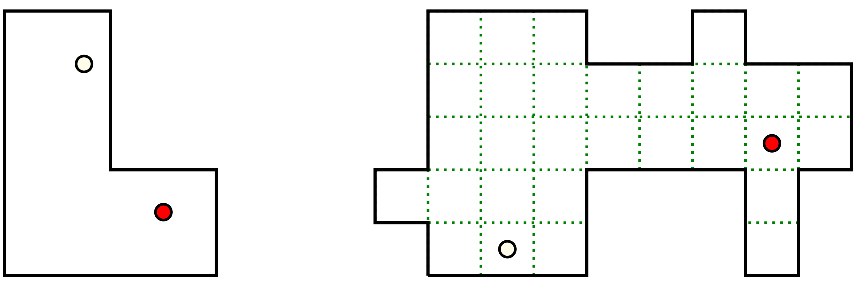


FIGURE 3. Une table de billard en forme de L et une table en forme de polyomino.

6. Un polygone convexe dont les angles sont des multiples rationnels de π.

7. Un polygone convexe dont les angles ne sont pas des multiples rationnels de π.

8. Donner des exemples de tables polygonales non-convexes pour lesquelles les deux cas (possible ou impossible) existent et où la réponse dépend de la position initiale de la bille rouge et la de bille blanche.

4. **Problème des secrétaires**

Fixons un entier $n \geq 1$. Alice et Bob jouent au jeu suivant :

Une boite opaque, fermée, contient n boules. Sur chaque boule est écrit un unique nombre rationnel. Il n'existe pas deux boules portant le même nombre. Le but d'Alice est de trouver la boule sur laquelle est écrit le plus grand nombre. Bob choisit aléatoirement une boule dans la boîte (c'est-à-dire qu'il a une probabilité $1/n$ de choisir chaque boule) et montre à Alice le nombre qui est écrit dessus. Alice peut garder cette boule ou la refuser. Si elle la garde, le jeu est terminé. Si elle refuse la boule, cette boule est retirée du jeu. Alors, Bob sort une nouvelle boule de la boîte (toujours aléatoirement) et la procédure précedente est répétée. Enfin, s'il ne reste qu'une seule boule dans la boîte, Alice est obligée de l'accepter.

A chaque instant, Alice sait uniquement combien il reste de boules dans la boîte ainsi que les nombres inscrits sur les boules qu'elle a déjà refusées. Alice gagne le jeu si elle accepte la boule avec le plus grand nombre. Sinon, c'est Bob qui gagne.

Ce jeu est connu dans la littérature sous le nom de *secretary problem*.

1. Trouver une stratégie qui permet à Alice de gagner avec la probabilité maximale P_{max} et déterminer la valeur de P_{max}. Commencer par étudier $n = 3, 4$.

2. Soit $m \geq 2$ un entier. Une boule avec un nombre q est dite *m-acceptable* s'il existe au plus $[n/m]$ boules dont le nombre est plus grand que q. Ici, $[x]$ désigne l'entier k tel que $k \leq x < k+1$.

Maintenant, Alice et Bob jouent à un jeu similaire : le seul changement est qu'Alice gagne si elle garde n'importe quelle boule m-acceptable, sinon elle perd.

a) Pour $m = 2$, trouver une stratégie que permet à Alice de gagner avec la probabilité maximale Q_{max} et déterminer la valeur de Q_{max}.

b) For $m > 2$, trouver une stratégie que permet à Alice de gagner avec la probabilité maximale Q_{max} et déterminer la valeur de Q_{max}.

3. Proposer d'autres directions de recherche et les étudier.

5. **Polygones isométriques**

1. Prouver les affirmations suivantes ou trouver des contre-exemples :

a) Si les 5 côtés d'un pentagone convexe ont la même longueur et 3 de ses diagonales ont la même longueur, alors ce pentagone est régulier.

b) Si 4 côtés d'un pentagone convexe ont la même longueur et 4 de ses diagonales ont la même longueur, alors ce pentagone est régulier.

c) Si 3 côtés d'un pentagone convexe ont la même longueur et 5 de ses diagonales ont la même longueur, alors ce pentagone est régulier.

d) Si les 5 côtés d'un pentagone convexe ont la même longueur et 2 de ses diagonales ont la même longueur, alors ce pentagone est régulier.

2. Soit $n \geq 3$ un entier fixé. Trouver l'ensemble des couples d'entiers c et d pour lesquels l'affirmation suivante est toujours vraie :

Si c côtés d'un n-gone convexe sont de même longueur et d diagonales sont de même longueur, alors le polygone est régulier.

3. Soit $n \geq 3$ un entier fixé. Trouver l'ensemble des couples d'entiers c et d pour lesquels l'affirmation suivante est toujours vraie :

Soit $A = A_1 \ldots A_n$ un polygone convexe et soit $B = B_1 \ldots B_n$ un polygone régulier (on dira que A_iA_j *correspond* à B_iB_j). Si c côtés de A ont la même longueur que les côtés correspondants de B et d diagonales de A ont la même longueur que les diagonales correspondantes de B, alors les polygones A et B sont isométriques.

4. Prouver les affirmations suivantes ou trouver des contre-exemples :

a) Si 5 côtés et 3 diagonales d'un pentagone convexe A ont la même longueur que les côtés et diagonales correspondants d'un autre pentagone convexe B, alors les pentagones A et B sont isométriques.

b) Si 4 côtés et 4 diagonales d'un pentagone convexe A ont la même longueur que les côtés et diagonales correspondants d'un autre pentagone convexe B, alors les pentagones A et B sont isométriques.

5. Soit $n \geq 3$ un entier fixé. Trouver l'ensemble des couples d'entiers c et d pour lesquels l'affirmation suivante est toujours vraie :

Soient $A = A_1 \ldots A_n$ et $B = B_1 \ldots B_n$ deux polygones convexes (on dira que A_iA_j *correspond* à B_iB_j). Si c côtés et d diagonales de A ont la même longueur que les côtés et diagonales correspondants de B, alors les polygones A et B sont isométriques.

6. Un dîner qui va coûter cher

n amis, numérotés de 1 à n, vont dîner tous ensemble au restaurant. Ils sont tous très bons en maths mais ils sont tous un peu bizarres : le $a^{\text{ième}}$ ami ne sera satisfait que si le coût total du repas est un entier strictement positif divisible par a.

Les amis entrent un par un dans le restaurant. Dès qu'une personne entre dans le restaurant, si elle n'est pas satisfaite, le groupe appelle immédiatement le serveur.

Tant qu'il y a au moins une personne contrariée dans le restaurant, une des personnes contrariées va commander le plat le moins cher qui la rende satisfaite. Ceci continue jusqu'à ce que toutes les personnes dans le restaurant soient satisfaites. Fort heureusement, le restaurant vend autant de plats que l'on veut, à tous les prix entiers.

Les amis peuvent choisir d'entrer dans le restaurant dans n'importe quel ordre. Après que le serveur a été appelé, n'importe quelle personne contrariée peut commander en premier. L'ordre de ces choix peut avoir un effet sur le nombre de fois que le groupe appelle le serveur.

Par exemple, pour $n = 3$, si les amis arrivent dans l'ordre $[1, 2, 3]$, le serveur sera appelé trois fois :

1 – #1 entre et est contrarié donc il appelle le serveur et commande un plat à 1 euro. Le serveur repart.

2 – #2 entre ensuite, est contrarié, appelle le serveur et commande un plat à 1 euro. Ainsi le total est 2 euros, les deux sont satisfaits, le serveur repart.

3 – Enfin #3 entre et est contrarié, il appelle le serveur et commande un plat à 1 euro. Le total est alors de 3 euros ce qui contrarie #2 qui commande un autre plat à 1 euro. #3 est de nouveau contrarié et commande un plat à 2 euros. Alors, le total de la commande est de 6 euros, les trois sont satisfaits. Le serveur repart et le dîner peut commencer.

Cependant, s'ils arrivent dans l'ordre $[3, 1, 2]$, alors le serveur ne sera appelé que deux fois.

1. Notons W_{max} le nombre maximal de fois que le groupe risque d'appeller le serveur. Trouver la valeur de W_{max} ou l'estimer.

2. Notons W_{min} le nombre minimal de fois que le groupe peut appeller le serveur. Trouver la valeur de W_{min} ou l'estimer.

3. On suppose maintenant que seuls les amis numérotés $a_1, \dots, a_k$ viennent au restaurant. Trouver ou estimer W_{max} et W_{min} dans ce cas. Ici, $a_1, \dots, a_k$ sont des entiers positifs distincts.

4. Notons W le nombre de fois que le groupe va appeler le serveur. Déterminer l'ensemble des valeurs possibles de W. Envisager les cas suivants :

a) Les amis sont numérotés de 1 à n.

b) Les amis sont numérotés $a_1, \dots, a_k$ des entiers positifs distincts.

5. Notons U le nombre total de fois que les amis ont été contrariés. Déterminer l'ensemble des valeurs possibles de U dans les cas a) et b) énoncés ci-dessus.

6. Proposer d'autres directions de recherche et les étudier.

7. Coloriage de cartes

Une *carte* est une division du plan réel en un nombre fini de régions dont les frontières sont des lignes brisées. Deux régions sont dites *adjacentes* si leurs frontières ont un côté en commun (non réduit à un point). Un *coloriage* de la carte est l'action d'assigner une couleur à chacune de ses régions (des régions adjacentes peuvent avoir la même couleur).

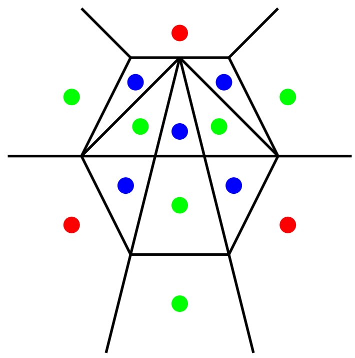


FIGURE 4. Un coloriage d'une carte.

Soit $n \geq 2$ un entier et C une carte. On définit un *n-cycle* de C comme une suite $R_1, \dots, R_n$ de régions distinctes telles que R_i et R_{i+1} sont adjacentes pour tout $1 \leq i \leq n-1$, ainsi que R_n et R_1. Un coloriage de la carte C est dit *n-admissible* si il ne possède pas de n-cycle monochrome, c'est-à-dire si tout n-cycle contient au moins deux régions de couleurs différentes.

On note $K(n)$ le plus petit entier tel que pour toute carte C il existe un coloriage n-admissible avec au plus $K(n)$ couleurs. Par exemple, un théorème de Kenneth Appel, Wolfgang Haken et John A. Koch affirme que toute carte peut être coloriée avec au plus quatre couleurs de façon à ce que deux régions adjacentes soient toujours de couleurs différentes, donc $K(2) \leq 4$.

1. Trouver la valeur exacte de $K(3)$ ou donner une borne inférieure et supérieure.

2. Même problème pour $K(n)$ avec $n \geq 4$.

3. Trouver des relations entre les nombres $K(n)$. Par exemple, est-il vrai que $K(n+1) \leq K(n)$ pour tout $n \geq 2$?

4. Existe-t-il un entier $n \geq 2$ tel que $K(n) = 2$?

5. Trouver K_∞ le plus petit nombre tel que, pour toute carte C, il existe un coloriage de C utilisant au plus K_∞ couleurs qui est n-admissible simultanément pour tout $n \geq 3$.

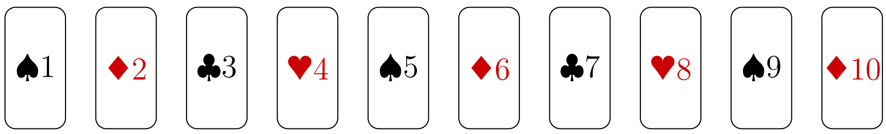
8. **Black Jack**

1. Dix cartes sur lesquelles sont inscrits les nombres de 1 à 10 sont déposées face visible sur une table. Jules choisit une carte. Puis Jim choisit plusieurs cartes l'une après l'autre jusqu'à ce que le total de ses cartes dépasse (au sens strict) la carte choisie par Jules. Alors, Jules choisit des cartes jusqu'à ce que son total dépasse celui de Jim et ainsi de suite. Le premier joueur qui obtient

a) exactement 21,

b) 21 ou plus

gagne. Quel joueur a une stratégie gagnante ?



2. Soient n et K des entiers positifs tels que $n < K$. Considérons le même jeu avec des cartes numérotées de 1 à n. Le gagnant est le premier joueur à obtenir a) exactement K , b) K ou plus.

3. Supposons qu'il y a n cartes sur lesquelles sont inscrits les nombres $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, et soit K un entier. Jules et Jim jouent au même jeu et essayent d'obtenir un total de a) exactement K, b) K ou plus. Déterminer l'ensemble des suites croissantes $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ pour lesquelles Jim a une stratégie gagnante. Etudier également le cas où certains nombres sont négatifs.

4. Etudier le jeu dans le cas de suites non-décroissantes $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$, où il existe plusieurs cartes avec le même nombre. Par exemple étudier le cas d'un jeu de 52 cartes avec l'ordre suivant :

$$\text{As} = 1 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 4 \;\; 5 \;\; 6 \;\; 7 \;\; 8 \;\; 9 \;\; 10 \;\; \text{Valet} = 11 \;\; \text{Dame} = 12 \;\; \text{Roi} = 13.$$

5. Proposer des questions similaires et les étudier.

9. **Quadruplets premiers**

Deux entiter positifs p and q sont appelés *nombres premiers jumeaux* si les deux sont premiers et $q = p + 2$. Par exemple, $(3, 5)$, $(5, 7)$, $(11, 13)$, $(17, 19)$ sont des paires de nombres premiers jumeaux. Si (p_1, q_1) et (p_2, q_2) sont deux paires de nombres premiers jumeaux, alors on dira que (p_1, q_1, p_2, q_2) est un *quadruplet premier*.

1. Trouver tous les entiers naturels n pour lesquels il existe des nombres entiers jumeaux p et q tels que les nombres suivants sont premiers également :

a) $2^n + p$ et $2^n + q$;

b) $2^{2n} + 2013 \cdot 2^n + 2014 + p$ et $2^{2n} + 2013 \cdot 2^n + 2014 + q$;

c) $9^n + 7^n + 5^n + 3^n + p$ et $9^n + 7^n + 5^n + 3^n + q$.

2. Soit $a > 1$ un entier positif. Existe-t-il seulement un nombre fini d'entiers n pour lesquels on peut trouver un quadruplet premier de la forme $(p, q, a^n + p, a^n + q)$?

3. Soient $a > 1$ un entier positif et $P(x)$ un polynome non-constant à coefficients entiers. Existe-t-il une infinité de $n \in \mathbb{N}$ tels que le quadruplet $(p, q, P(a^n) + p, P(a^n) + q)$ soit premier pour p et q des nombres premiers jumeaux ?

4. Soient $a_1, \ldots, a_k$ des entiers strictement supérieurs à 1. Estimer le nombre d'entiers naturels n pour lesquels il existe p et q des nombres premiers jumeaux tels que

$$a_1^n + \cdots + a_k^n + p \quad \text{et} \quad a_1^n + \cdots + a_k^n + q$$

soient également des nombres premiers jumeaux.

10. **Puzzles**

1. Un étudiant prend une feuille de papier formée d'une grille carrée de taille $n \times n$ et la découpe en k pièces le long des lignes de la grille. Il se trouve qu'il existe une unique façon de reformer le carré $n \times n$ à partir des k pièces (à une rotation autour du centre du carré près). Les pièces peuvent subir une rotation mais il est interdit de les retourner.

Trouver la valeur maximale de k ou trouver une borne supérieure. Déterminer l'ensemble des valeurs que peut prendre k. Distinguer les cas suivants :

a) Certaines pièces ont la même forme et les échanger ne donne pas un nouvel assemblage.

b) Les pièces sont deux à deux distinctes.

2. Etudier le même problème pour une grille triangulaire de taille $n \times n$.

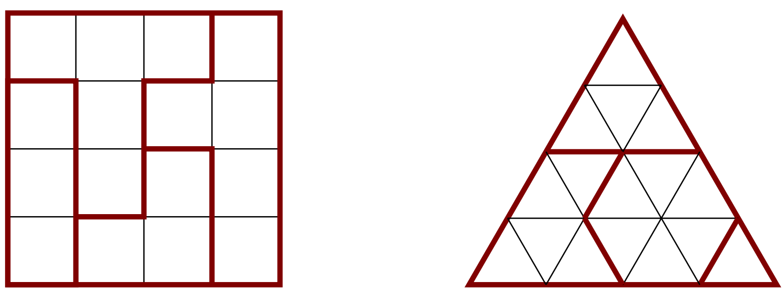


FIGURE 5. Une grille carrée et une grille triangulaire de taille 4×4 (avec puzzles).

3. Etudier le même problème pour d'autres figures planes ou d'autres types de grilles.

4. Formuler et étudier des problèmes analogues en dimension 3.

11. **Itérations denses**

Un ensemble M de nombres réels est dit *dense* dans $\mathbb{R}$ si tout intervalle ouvert non vide $]a, b[$ de $\mathbb{R}$ contient au moins un élément de M. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On dira que f *se propage en le point* $p \in \mathbb{R}$ si l'ensemble des itérations

$$\{f(p), f^2(p), \ldots, f^k(p), \ldots\}$$

est dense dans $\mathbb{R}$, où $f^k(p) = \underbrace{f(f(\ldots f(}_{k \text{ times}}p)\ldots))$ est la $k^{\text{ème}}$ itération de f au point p.

1. Existe-t-il un polynome réel $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ de degré n qui se propage en 0 ? Commencer par étudier $n = 1, 2, 3$.

2. Notons $C(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $S_p(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de ces fonctions continues qui se propage en le point p. Etudier les propriétés de ces sous-ensembles. Par exemple, $S_p(\mathbb{R})$ est-il infini ? indénombrable ?

3. Existe-t-il une fonction continue qui ne se propage qu'en un seul point ? Décrire l'intersection de $S_p(\mathbb{R})$ et $S_q(\mathbb{R})$ pour $p, q \in \mathbb{R}$.

4. Formuler et étudier un problème analogue pour l'intervalle $[0, 1]$ au lieu de $\mathbb{R}$ et des fonctions $f : [0, 1] \to [0, 1]$.

5. Proposer d'autres directions de recherche et les étudier.